ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том (2017). С. 1–46

УДК 512.745.4, 512.815, 512.554.32, 514.765

ИНД-МНОГООБРАЗИЯ ОБОБЩЁННЫХ ФЛАГОВ: ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ

© 2017 г. **М. В. ИГНАТЬЕВ, И. ПЕНКОВ**

Аннотация. Это обзор результатов, касающихся структуры однородных инд-многообразий G/P инд-групп $G = \mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C}), \mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C}), \mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$, подчинённых тому условию, что G/P является индуктивным пределом компактных однородных пространств G_n/P_n. В этом случае подгруппа $P \subset G$ является разложимой параболической подгруппой группы G, а инд-многообразие G/P допускает «флаговую реализацию». Вместо обычных флагов здесь нужно рассматривать обобщённые флаги — бесконечные, вообще говоря, цепи $\mathcal{C}$ подпространств естественного представления V группы G, удовлетворяющие некоторому условию: грубо говоря, для каждого ненулевого вектора v из V должны найтись наибольшее пространство в $\mathcal{C}$, не содержащее v, и наименьшее подпространство в $\mathcal{C}$, содержащее v.

Мы начинаем с обзора конструкции инд-многообразий обобщённых флагов, а затем показываем, что эти инд-многообразия являются однородными инд-пространствами вида G/P для расщепляющая параболических инд-подгрупп $P \subset G$. Мы также кратко описываем характеризацию более общих, то есть нерасщепляющих, параболических инд-подгрупп в терминах обобщённых флагов. В частном случае инд-грассманиана X мы приводим чисто алгеброгеометрическое построение инд-многообразия X. Кроме того, обсуждаются такие темы, как теорема Ботта–Бореля–Вейля для инд-многообразий обобщённых флагов, конечномерные векторные расслоения на инд-многообразиях обобщённых флагов, разложение Шуберта инд-многообразия G/P для произвольной расщепляющей параболической инд-подгруппы $P \subset G$, а также орбиты вещественных форм на G/P для $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$.

Ключевые слова: инд-многообразие, инд-группа, обобщённый флаг, разложение Шуберта, вещественная форма.

AMS Subject Classification: 22E65, 17B65, 14M15.

СОДЕРЖАНИЕ

Первый автор был частично поддержан РФФИ, гранты 14–01–97017 и 16–01–00154, а также Министерством образования и науки Российской федерации, проект 204. Часть этой работы была сделана во время визита первого автора в Университет Якобса в Бремене; первый автор благодарит этот университет за гостеприимство. Оба автора были частично поддержаны Немецким фондом научных исследований DFG, грант PE 980/6–1.

1. Введение

Многообразия флагов играют фундаментальную роль в геометрии. Проективные пространства и грассманианы восходят к началам современной геометрии и возникают почти в любом аспекте изучения глобальных геометрических структур. Многообразия полных (максимальных) флагов также играют выдающуюся роль в геометрии в целом, однако они чаще ассоциируются с геометрической теорией представлений. Причина этого в том, что они являются универсальными компактными однородными пространствами группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, поэтому практически любая ветвь теории представлений любой алгебраической группы G содержит глубокие результаты, связанные с геометрией флагового многообразия G/B. Основной пример здесь — теорема Ботта–Бореля–Вейля. Другой пример — теорема локализации Бейлинсона–Бернштейна, и можно ещё долго перечислять яркие результаты в этом направлении.

Если задуматься о том, чем могли бы быть «бесконечномерные многообразия флагов», то становится ясно, что к этому вопросу есть много разных подходов. Один из них — изучать однородные инд-пространства G/B групп Каца–Муди G. Эти инд-многообразия играют существенную роль в теории представлений и геометрии с 1980-х годов, см., к примеру, [Ma], [PS] и [Ku].

Есть и другой подход, которому мы следуем в этой работе. Её главная тема — однородные инд-пространства локально линейных инд-групп $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$ и $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$. Эти «бесконечномерные многообразия флагов» суть гладкие локально проективные инд-многообразия (в частности, инд-схемы), точки на которых соответствуют некоторым цепям подпространств в данном счётномерном комплексном векторном пространстве $V \cong \mathbb{C}^\infty$. Более того, наши «бесконечномерные многообразия флагов» исчерпываются обычными конечномерными флаговыми многообразиями. Заранее непонятно, какие цепи подпространств в V надо рассматривать, чтобы получилась биекция между этими цепями и борелевскими (или, более общо, параболическими) подгруппами группы $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$. Ответ на этот вопрос, полученный в [DP1], приводит к определению обобщённого флага.

Обобщённый флаг — это цепь подпространств $\mathcal{F}$, удовлетворяющая тому условию, что каждый вектор $v \in V$ однозначно определяет пару $F'_v \subset F''_v$ подпространств из $\mathcal{F}$ такую, что F'_v — это непосредственный предшественник F''_v и $v \in F''_v \setminus F'_v$ (точное определение см. в параграфе 2.2). Важно, что не требуется, чтобы каждое подпространство $F \in \mathcal{F}$ обладало непосредственным предшественником *и* непосредственным последователем, то есть подпространством, непосредственно следующим за F; вместо этого предполагается, лишь что существует непосредственный предшественник *или* непосредственный потомок. Появление таких относительно сложных линейных порядков на цепях $\mathcal{F}$ связано, разумеется, с тем, что борелевские подгруппы в $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, содержащие данный расщепляющий максимальный тор, находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными порядками на счётном множестве [DP3].

Другой способ увидеть, как возникают обобщённые флаги, — попытаться расширить на бесконечность конечный флаг в конечномерном пространстве с помощью следующей бесконечной процедуры: на каждом шаге новый флаг добавляется к части флага, полученного на предыдущем шаге, причём каждый раз длина флага возрастает как максимум на один. Множество способов выбрать место, где конечный флаг будет удлинён, влечёт за собой то, что на выходе этой процедуры мы получим обобщённый флаг; точная математическая формулировка «процедуры удлинения» даётся формулой (4) в параграфе 2.2.

В результате мы приходим к достаточно хорошей характеризации инд-многообразий обобщённых флагов как инд-многообразий, допускающих исчерпание обычными флаговыми многообразиями. Необходимо также обратить внимание на вопрос о соизмеримости обобщённых флагов: две точки на одном и том же инд-многообразии обобщённых флагов соответствуют обобщённым флагам, которые «близки друг к другу», то есть, в строгих терминах, E-соизмеримы, см. параграф 2.2. Идея соизмеримости восходит к Э. Прессли и Г. Сигалу.

Мы полагаем, что взаимосвязь между инд-многообразиями обобщённых флагов и теорией представлений инд-групп $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$ окажется по крайней мере настолько же богата, как в конечномерном случае. Степень завершённости обоих подходов, однако, далека от той, которая присуща конечномерной теории, так что большая часть работы ещё впереди. Наша цель скромна: дать первый обзор результатов, который должен служить приглашением к дальнейшим исследованиям.

Краткое содержание статьи таково. В главе 2 мы даём определения инд-многообразий и инд-групп и рассматриваем наши главные примеры инд-групп. Мы определяем обобщённые флаги (а также изотропные обобщённые флаги) и показываем, что обобщённые флаги, E-соизмеримые с данным обобщённым флагом $\mathcal{F}$, образуют инд-многообразие. В главе 3 мы показываем, что инд-грассманианы могут быть определены в чисто алгеброгеометрических терминах как индуктивные пределы линейных вложений конечномерных грассманианов. В главе 4 мы обсуждаем картановские, борелевские и параболические подгруппы классических инд-групп и доказываем, что инд-многообразия обобщённых флагов являются однородными пространствами G/P, где $G = \mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$ (или $G = \mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$ в случае изотропных обобщённых флагов), а P — расщепляющая параболическая инд-подгруппа. Мы также коротко обсуждаем общие, то есть нерасщепляющие, борелевские и параболические подгруппы.

В главе 5 мы строим разложение Брюа классической инд-группы, а также разложение Шуберта её инд-многообразий обобщённых флагов. В частности, мы даём критерий гладкости подмногообразия Шуберта. Глава 6 посвящена переносу теорем Ботта–Бореля–Вейля и Барта–Ван де Вена–Тюрина–Сато на случай обобщённых флагов. Наконец, в главе 7 мы переносим некоторые из известных результатов Дж.А. Вольфа об орбитах вещественных форм полупростых групп Ли на инд-многообразия обобщённых флагов для $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$.

Благодарности. Первый автор был частично поддержан РФФИ, гранты 14–01–97017 и 16–01–00154, а также Министерством образования и науки Российской федерации, проект 204. Часть этой работы была сделана во время визита первого автора в Университет Якобса в Бремене; первый автор благодарит этот университет за гостеприимство. Оба автора были частично поддержаны Немецким фондом научных исследований DFG, грант PE 980/6–1.

2. Определения и примеры

В этой главе мы даём точные определения, приводим основные примеры, используемые в дальнейшем, и доказываем некоторые начальные свойства обобщённых флагов. Этот материал взят из работ [DP1] и [FP1].

2.1. Инд-многообразия и инд-группы. Все алгебраические многообразия и группы рассматриваются над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Определение 2.1. *Инд-многообразием* называется индуктивный предел $X = \varinjlim X_n$ цепи морфизмов алгебраических многообразий

$$X_1 \xrightarrow{\varphi_1} X_2 \xrightarrow{\varphi_2} \ldots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} X_n \xrightarrow{\varphi_n} X_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \ldots . \tag{1}$$

Очевидно, индуктивный предел (1) не изменится, если мы заменим последовательность $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ подпоследовательностью $\{X_{i_n}\}_{n\geqslant 1}$, а морфизмы φ_n — композициями

$$\widetilde{\varphi}_{i_n} = \varphi_{i_{n+1}-1} \circ \ldots \circ \varphi_{i_n+1} \circ \varphi_{i_n}.$$

Пусть Y — другое инд-многообразие, представленное как индуктивный предел цепи

$$Y_1 \xrightarrow{\psi_1} Y_2 \xrightarrow{\psi_2} \ldots \xrightarrow{\psi_{n-1}} Y_n \xrightarrow{\psi_n} Y_{n+1} \xrightarrow{\psi_{n+1}} \ldots.$$

Морфизм инд-многообразий $f\colon X \to Y$ — это отображение из $\varinjlim X_n$ в $\varinjlim Y_n$, индуцированное набором морфизмов алгебраических многообразий

$$\{f_n\colon X_n \to Y_{i_n}\}_{n\geqslant 1}$$

таких, что

$$\widetilde{\psi}_{i_n} \circ f_n = f_{n+1} \circ \varphi_n$$

для любого $n \geqslant 1$. *Тождественный морфизм* id_X — это морфизм, индуцированный тождественным отображением $X \to X$. Как обычно, морфизм $f\colon X \to Y$ называется *изоморфизмом*, если существует морфизм $g\colon Y \to X$, для которого

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y,\ \ g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

Инд-многообразие X снабжается топологией так: мы объявляем подмножество $U \subset X$ *открытым*, если его прообраз относительно естественного отображения

$$X_m \to \varinjlim X_n$$

открыт для любого m. Ясно, что любое открытое (а также замкнутое или локально замкнутое) подмножество Z в X несёт структуру инд-многообразия, индуцированную структурой инд-многообразия на X. Мы будем называть такое Z *инд-подмногообразием* в X. В дальнейшем мы рассматриваем только такие цепи (1), где морфизмы φ_n являются вложениями, поэтому

$$X = \bigcup_{n\geqslant 1} X_n.$$

В этом случае последовательность $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ называется *исчерпанием* инд-многообразия X.

Далее, введём понятие гладкой точки инд-многообразия. Пусть $x \in X$, тогда $x \in X_n$ для достаточно больших n. Пусть $\mathfrak{m}_{n,x} \subset \mathcal{O}_{X_n,x}$ — максимальный идеал локализации кольца $\mathcal{O}_{X_n}$ в точке x. Для каждого $k \geqslant 1$ существует эпиморфизм

$$\alpha_{n,k}\colon S^k(\mathfrak{m}_{n,x}/\mathfrak{m}_{n,x}^2) \to \mathfrak{m}_{n,x}^k/\mathfrak{m}_{n,x}^{k+1}.$$

Заметим, что x — гладкая точка многообразия X_n тогда и только тогда, когда $\alpha_{n,k}$ является изоморфизмом для любого k. Переходя к проективному пределу, получаем отображение

$$\widehat{\alpha}_k = \varprojlim \alpha_{n,k}\colon\ \varprojlim S^k(\mathfrak{m}_{n,x}/\mathfrak{m}_{n,x}^2) \to \varprojlim \mathfrak{m}_{n,x}^k/\mathfrak{m}_{n,x}^{k+1},$$

которое является эпиморфизмом для всех k. Будем говорить, что x — *гладкая точка* инд-многообразия X, если $\widehat{\alpha}_k$ является изоморфизмом для любого k. В противном случае мы называем x *особой точкой*. Понятие гладкости точки не зависит от выбора исчерпания $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ для X. Инд-многообразие X называется *гладким*, если каждая точка $x \in X$ — гладкая.

Пример 2.2. i) Предположим, что каждое многообразие X_n в цепи (1) — это аффинное пространство, а каждый образ $\varphi_n(X_n)$ — аффинное подпространство в X_{n+1}, причём

$$\lim_{n\to\infty} \dim X_n = \infty.$$

Тогда, с точностью до изоморфизма, $X = \varinjlim X_n$ не зависит от выбора цепи $\{X_n, \varphi_n\}_{n\geqslant 1}$ с такими свойствами. Мы будем писать $X = \mathbb{A}^\infty$ и называть его *бесконечномерным аффинным пространством.* В частности, $\mathbb{A}^\infty$ допускает исчерпание

$$\mathbb{A}^\infty = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathbb{A}^n,$$

где $\mathbb{A}^n$ обозначает n-мерное аффинное пространство. Ясно, что $\mathbb{A}^\infty$ — гладкое инд-многообразие.

ii) Пусть теперь каждое X_n — проективное пространство, а каждый образ $\varphi_n(X_n)$ — проективное подпространство в X_{n+1}, причём

$$_{n\to\infty} \dim X_n = \infty.$$

Тогда $X = \varinjlim X_n$ не зависит от выбора цепи $\{X_n, \varphi_n\}_{n\geqslant 1}$ с такими свойствами. Мы пишем

$$X = \mathbb{P}^\infty = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathbb{P}^n$$

и называем его *бесконечномерным проективным пространством.* Оно тоже является гладким инд-многообразием.

Вообще говоря, инд-группой называется групповой объект в категории инд-многообразий. В этой работе, однако, мы рассматриваем только локально линейные алгебраические инд-группы.

Определение 2.3. *Локально линейной алгебраической инд-группой* называется инд-многообразие $G = \bigcup G_n$ такое, что все G_n являются линейными алгебраическими группами, а все вложения — гомоморфизмами групп. В дальнейшем для краткости мы будем говорить просто *инд-группа.* Понятно, что G является группой. Под *инд-подгруппой* в G мы понимаем замкнутую подгруппу в G. *Морфизм инд-групп* $f\colon G \to H$ — это гомоморфизм групп, который также является морфизмом инд-многообразий.

Теперь мы введём некоторые инд-группы, которые играют центральную роль в этом обзоре. Обозначения из следующего примера будут использоваться на протяжении всей статьи.

Пример 2.4. i) Обозначим через V счётномерное комплексное векторное пространство с данным базисом E. Мы фиксируем порядок на E с помощью упорядоченного множества $\mathbb{Z}_{>0}$, то есть

$$E = \{e_1,\ e_2,\ \ldots\}.$$

Пусть V_* — линейная оболочка дуальной системы

$$E^* = \{e_1^*,\ e_2^*,\ \ldots\}.$$

По определению, *финитарной полной линейной группой* $\mathrm{GL}(V, E)$ называется группа обратимых $\mathbb{C}$-линейных преобразований пространства V, которые оставляют на месте все элементы E, кроме конечного числа. Нетрудно (но важно) проверить, что $\mathrm{GL}(V, E)$ зависит только от пары (V, V_*), но не от E. Базис E' пространства V будем называть *G-подходящим*, если

$$\mathrm{GL}(V, E) = \mathrm{GL}(V, E').$$

Далее, ясно, что у каждого оператора из $\mathrm{GL}(V, E)$ есть корректно определённый определитель. Через $\mathrm{SL}(V, E)$ мы обозначаем подгруппу в $\mathrm{GL}(V, E)$, состоящую из всех операторов с определителем 1. Эта подгруппа называется *финитарной специальной линейной группой.*

Далее, представим базис E как объединение

$$E = \bigcup E_n$$

его вложенных конечных подмножеств. Тогда V исчерпывается своими конечномерными подпространствами $V_n = \langle E_n\rangle_{\mathbb{C}}$, где $\langle\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ означает $\mathbb{C}$-линейную оболочку. Эквивалентная запись: $V = \varinjlim V_n$. Каждому линейному оператору $\varphi\colon V_n \to V_n$ можно поставить в соответствие оператор

$$\widehat{\varphi}\colon V_{n+1} \to V_{n+1}$$

такой, что $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x)$ для $x \in V_n$, $\widehat{\varphi}(e) = e$ при $e \in E \setminus E_n$. Это задаёт вложения

$$\mathrm{GL}(V_n) \hookrightarrow \mathrm{GL}(V_{n+1}),\ \mathrm{SL}(V_n) \hookrightarrow \mathrm{SL}(V_{n+1}),$$

так что

$$\mathrm{GL}(V, E) = \varinjlim \mathrm{GL}(V_n),\ \mathrm{SL}(V, E) = \varinjlim \mathrm{SL}(V_n)$$

являются инд-группами. Иногда мы будет писать $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$ и $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$ вместо $\mathrm{GL}(V, E)$ и $\mathrm{SL}(V, E)$ соответственно, тогда нужно иметь в виду указанное выше исчерпание пространства V его конечномерными подпространствами V_n.

ii) Предположим теперь, что V снабжено невырожденной симметрической или кососимметрической формой β. Будем предполагать, что ограничение β_n формы β на V_n невырожденно при всех n и что $\beta(e, V_n) = 0$ при $e \in E \setminus E_n$. *Финитарная ортогональная группа* $\mathrm{O}(V, E, \beta)$ и *финитарная симплектическая группа* $\mathrm{Sp}(V, E, \beta)$ — это подгруппы в $\mathrm{GL}(V, E)$, состоящие из всех обратимых операторов, сохраняющих форму β в случае, когда β симметрична или кососимметрична соответственно. Положим также

$$\mathrm{SO}(V, E, \beta) = \mathrm{O}(V, E, \beta) \cap \mathrm{SL}(V, E).$$

Если линейный оператор φ на V_n сохраняет форму β_n, то линейный оператор $\widehat{\varphi}$ на V_{n+1} будет сохранять форму β_{n+1}. Значит, мы можем представить наши группы как индуктивные пределы:

$$\mathrm{O}(V, E, \beta) = \varinjlim \mathrm{O}(V_n, \beta_n),\ \mathrm{SO}(V, E, \beta) = \varinjlim \mathrm{SO}(V_n, \beta_n),\ \mathrm{Sp}(V, E, \beta) = \varinjlim \mathrm{Sp}(V_n, \beta).$$

Таким образом, они являются инд-группами. Вновь, когда мы будем писать $\mathrm{O}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$ или $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$, нужно иметь в виде данное исчерпание пространства V конечномерными β-невырожденными подпространствами.

В главах 2–5 через G мы будем обозначать одну из инд-групп $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$. Пусть, например, $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$. Пусть H — подгруппа, состоящая из всех элементов $g \in G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, которые диагональны в базисе E. Тогда H — это инд-подгруппа в G, называемая *расщепляющей подгруппой Картана*. Инд-подгруппа $B \subset G$, содержащая H, называется *расщепляющей борелевской подгруппой*, если она локально разрешима (то есть если каждая конечномерная инд-подгруппа в B разрешима) и максимальна с таким свойством. Инд-подгруппа, содержащая расщепляющую борелевскую подгруппу B, называется *расщепляющей параболической подгруппой*. Эквивалентное определение: инд-подгруппа P в G, содержащая H, называется расщепляющей параболической подгруппой в G, если $P \cap G_n$ является параболической подгруппой в G_n для всех $n \geqslant 1$, где $G = \bigcup_{n\geqslant 1} G_n$ — естественное исчерпание группы G, описанное выше. Факторпространство

$$G/P = \bigcup\nolimits_{n\geqslant 1} G_n/(P \cap G_n)$$

является *локально проективным* инд-многообразием (то есть допускает исчерпание проективными многообразиями); заметим, однако, что, вообще говоря, G/P не будет *проективным* инд-многообразием, то есть G/P не изоморфно замкнутому инд-подмногообразию в $\mathbb{P}^\infty$: см. теорему 6.4 ниже. Картановские, борелевские и параболические подгруппы произвольной классической инд-группы G более детально обсуждаются в главе 4, где мы также характеризуем G/P как инд-многообразие обобщённых флагов.

2.2. Обобщённые флаги. В этом параграфе мы вводим ключевое понятие, а именно, определяем обобщённые флаги. Очевидное понятие бесконечного флага (возможного, бесконечного в одну или в обе стороны, см. определение ниже) недостаточно, чтобы описать локально проективные однородные инд-пространства классических инд-групп. Это понятие должно быть заменено несколько более замысловатым понятием обобщённого флага, приводимым ниже.

Напомним, что через V обозначается счётномерное комплексное векторное пространство. *Цепь* подпространств в V — это множество $\mathcal{C}$ различных подпространств пространства V таких, что если $F,\ F' \in \mathcal{C}$, то либо $F \subset F'$, либо $F' \subset F$. Если $\mathcal{C}$ — цепь подпространств в V, то мы будем обозначать через $\mathcal{C}'$ (соответственно, $\mathcal{C}''$) подцепь в $\mathcal{C}$, состоящую из всех $F \in \mathcal{C}$, у которых есть непосредственный потомок (соответственно, непосредственный предшественник). Мы также будем писать $\mathcal{C}^\dagger$, имея в виду множество всех пар $(F',\ F'')$, где $F'' \in \mathcal{C}''$ — непосредственный потомок пространства $F' \in \mathcal{C}'$.

Определение 2.5. *Обобщённый флаг* — это цепь $\mathcal{F}$ подпространств пространства V со свойством $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \cup \mathcal{F}''$ и такая, что

$$V \setminus \{0\} = \bigcup_{(F',\ F'')\in\mathcal{F}^\dagger} F'' \setminus F'.$$

Отметим, что каждый ненулевой вектор $v \in V$ однозначно определяет пару $(F'_v,\ F''_v) \in \mathcal{F}^\dagger$ такую, что $v \in F''_v \setminus F'_v$. Если $\mathcal{F}$ — обобщённый флаг, то каждая из цепей $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ его однозначно определяет. В самом деле, если $(F', F'') \in \mathcal{F}^\dagger$, то

$$F' = \bigcup_{G'' \in \mathcal{F}'',\ G'' \subsetneq F''} G'',\ F'' = \bigcap_{G' \in \mathcal{F}',\ G' \supsetneq F'} G'$$

(см. [DP1, Proposition 3.2]). Обобщённый флаг $\mathcal{F}$ называется *максимальным*, если он не содержится строго в другом обобщённом флаге. Это равносильно условию $\dim F''_v = \dim F'_v + 1$ для всех ненулевых векторов $v \in V$. Максимальный обобщённый флаг не обязательно является максимальной цепью подпространств в V, см. пример 2.7 v) ниже. Каждый обобщённый флаг содержится в некотором максимальном обобщённом флаге.

По определению, обобщённый флаг $\mathcal{F}$ является *флагом*, если $\mathcal{F}$ изоморфен как линейно упорядоченное множество подмножеству в $\mathbb{Z}$ (с естественным порядком).

Выберем обобщённый флаг $\mathcal{F}$ и зафиксируем линейно упорядоченное множество $(\mathcal{A}, \preceq)$ и изоморфизм упорядоченных множеств

$$\mathcal{A} \to \mathcal{F}^\dagger,\ \alpha \mapsto (F'_\alpha, F''_\alpha)$$

такие, что $\mathcal{F}$ может быть записан в виде

$$\mathcal{F} = \{F'_\alpha, F''_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Мы будем писать $\alpha \prec \beta$, если $\alpha \preceq \beta$ и $\alpha \neq \beta$ при $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$.

Как и выше, фиксируем базис E пространства V. Мы назовём обобщённый флаг $\mathcal{F}$ *совместимым* с базисом E, если существует (автоматически сюръективное) отображение $\sigma\colon E \to \mathcal{A}$, для которого каждая пара $(F'_\alpha, F''_\alpha) \in \mathcal{F}^\dagger$ имеет вид

$$F'_\alpha = \langle e \in E \mid \sigma(e) \prec \alpha \rangle_{\mathbb{C}},\ F''_\alpha = \langle e \in E \mid \sigma(e) \preceq \alpha \rangle_{\mathbb{C}}, . \tag{2}$$

Согласно [DP1, Proposition 4.1], каждый обобщённый флаг обладает совместимым с ним базисом. Ниже мы приводим доказательство этого факта.

Предложение 2.6. *Каждый обобщённый флаг $\mathcal{F}$ в V обладает совместимым базисом.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{F}$ максимален. Пусть

$$D = \{d_1,\ d_2,\ \ldots\}$$

— любой базис пространства V. Мы используем индукцию, чтобы построить базис $L = \{l_1,\ l_2,\ \ldots\}$ такой, что

$$\langle l_1,\ \ldots,\ l_n \rangle_{\mathbb{C}} = \langle d_1,\ \ldots,\ d_n \rangle_{\mathbb{C}}$$

для всех n и подпространства F'_{l_n} попарно различны.

Пусть $l_1 = d_1$. Предположим, что векторы $l_1,\ \ldots,\ l_n$ уже построены. Обозначим через W аффинное подпространство в V вида

$$d_{n+1} + \langle l_1,\ \ldots,\ l_n \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Мы утверждаем, что найдётся вектор $l \in W$, для которого подпространство F'_l не совпадает ни с одним их подпространств $F'_{l_1},\ \ldots,\ F'_{l_n}$. Действительно, предположим противное. Тогда W содержится в объединении $\bigcup_{i=1}^n F''_{l_i}$, поэтому $W \subset F''_{l_k}$ для какого-то k. Если $i_1,\ \ldots,\ i_n$ — такая перестановка чисел $1,\ \ldots,\ n$, что $F'_{l_{i_1}} \subsetneq \ldots \subsetneq F'_{l_{i_n}}$, то $F''_{l_{i_1}} \subsetneq \ldots \subsetneq F''_{l_{i_n}}$ и $W \subset F''_{l_{i_n}}$. Поскольку $\mathcal{F}$ максимален,

$$\dim F'_{l_{i_n}} \cap \langle d_{n+1}, l_{i_n} \rangle_{\mathbb{C}} \geqslant 1,$$

но $l_{i_n} \notin F'_{l_{i_n}}$, так что $W \cap F'_{l_{i_n}} \neq \varnothing$. Более того, $\dim W \cap F'_{l_{i_n}} \geqslant n-1$, потому что $l_{i_1},\ \ldots,\ l_{i_{n-1}} \in F'_{l_{i_n}}$. С другой стороны, $l_{i_n} \notin W \cap F'_{l_{i_n}}$, поэтому $\dim W \cap F'_{l_{i_n}} = n-1$. Точнее говоря,

$$W \cap F'_{l_{i_n}} = d_{n+1} + \langle l_{i_1},\ \ldots,\ l_{i_{n-1}} \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Согласно нашему предположению, для любого $l \in W \cap F'_{l_{i_n}}$ подпространство F'_l совпадает с одним из подпространств $F'_{l_{i_1}},\ \ldots,\ F'_{l_{i_{n-1}}}$, так как $F'_l \neq F'_{l_{i_n}}$.

Рассуждая подобным образом, мы получаем, что для каждого $2 \leqslant k \leqslant n$
$$W \cap F'_{l_{i_k}} = d_{n+1} + \langle l_{i_1},\ \ldots,\ l_{i_{k-1}} \rangle_{\mathbb{C}},$$
и, каким бы ни был $l \in W \cap F'_{l_{i_k}}$, подпространство F'_l совпадает с одним из подпространств $F'_{l_{i_1}},\ \ldots,\ F'_{l_{i_{k-1}}}$. В частности,
$$W \cap F'_{l_{i_2}} = d_{n+1} + \langle l_{i_1} \rangle_{\mathbb{C}}$$
и $F'_{d_{n+1}+cl_{i_1}} = F'_{l_{i_1}}$ для всех $c \in \mathbb{C}$. Это означает, что $\langle d_{n+1},\ e_{l_1} \rangle_{\mathbb{C}} \subset F''_{l_{i_1}}$. Поскольку обобщённый флаг $\mathcal{F}$ максимален,
$$\dim F'_{l_{i_1}} \cap \langle d_{n+1},\ l_{i_1} \rangle_{\mathbb{C}} \geqslant 1.$$
Однако $l_{i_1} \notin F'_{l_{i_1}}$, а значит, $W \cap F'_{l_{i_1}} \neq \varnothing$. Выбирая любой $l \in W \cap F'_{l_{i_1}}$, мы видим, что подпространства $F'_{l_1},\ \ldots,\ F'_{l_n},\ F'_l$ попарно различны, что противоречит нашему предположению о том, что F'_l совпадает с одним из подпространств $F'_{l_1},\ \ldots,\ F'_{l_n}$.

Положим теперь $l_{n+1} = l$, где l — любой вектор из W, для которого подпространства $F'_{l_1},\ \ldots,\ F'_{l_n},\ F'_l$ попарно различны. Мы заключаем, что требуемый базис L построен. Легко видеть, что для любого $F' \in \mathcal{F}'$ множество $F'' \setminus F'$ состоит содержит ровно один вектор из L. Более того, $\mathcal{F}$ совместим с базисом L, потому что, полагая $\sigma(l) = \alpha$ для $l \in L$, где $l \in F''_\alpha \setminus F'_\alpha$, мы получим сюръекцию $\sigma\colon L \to \mathcal{A}$, удовлетворяющую свойству (2).

Если $\mathcal{F}$ — не обязательно максимальный обобщённый флаг, достаточно взять любой базис, совместимый с каким-то максимальным обобщённым флагом $\mathcal{G}$, содержащим $\mathcal{F}$. Такой базис автоматически будет совместимым с $\mathcal{F}$. $\square$

Далее, назовём обобщённый флаг $\mathcal{F}$ *слабо совместимым* с базисом E, если $\mathcal{F}$ совместим с каким-нибудь базисом L пространства V, для которого множество $E \setminus (E \cap L)$ конечно. Два обобщённых флага $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ называются *E-соизмеримыми*, если оба они слабо совместимы с базисом E и существуют такие изоморфизм упорядоченных множеств $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ и конечномерное подпространство $U \subset V$, что

i) $\phi(F) + U = F + U$ для всех $F \in \mathcal{F}$;

ii) $\dim \phi(F) \cap U = \dim F \cap U$ для всех $F \in \mathcal{F}$.

Если $\mathcal{F}$ — обобщённый флаг, совместимый с E, то через $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ мы будем обозначать множество всех обобщённых флагов в V, E-соизмеримых с $\mathcal{F}$.

Чтобы ввести на $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ структуру инд-многообразия, обозначим
$$\mathcal{F}_n = \{F \cap V_n,\ F \in \mathcal{F}\}.$$
Для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ положим
$$d'_{\alpha,n} = \dim F'_\alpha \cap V_n = |\{e \in E_n \mid \sigma(e) \prec \alpha\}|,$$
$$d''_{\alpha,n} = \dim F''_\alpha \cap V_n = |\{e \in E_n \mid \sigma(e) \preceq \alpha\}|.$$
Пусть $\mathcal{F}\ell_n$ — проективное многообразие флагов в V_n вида $\{U'_\alpha, U''_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\}$, где U'_α, U''_α — подпространства в V_n размерностей $d'_{\alpha,n}$, $d''_{\alpha,n}$ соответственно, $U'_\alpha \subset U''_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$ и $U''_\alpha \subset U'_\beta$ для любых $\alpha \prec \beta$. (Конечно, если $\mathcal{A}$ бесконечно, найдётся бесконечно много таких α, $\beta \in \mathcal{A}$, что $U''_\alpha = U'_\beta$.) Определим вложение
$$\iota_n\colon \mathcal{F}\ell_n \to \mathcal{F}\ell_{n+1},\ \{U''_\alpha, U''_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\} \mapsto \{W''_\alpha, W''_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\}$$
правилом
$$\begin{aligned} W'_\alpha &= U'_\alpha \oplus \langle e \in E_{n+1} \setminus E_n \mid \sigma(e) \prec \alpha \rangle_{\mathbb{C}}, \\ W''_\alpha &= U''_\alpha \oplus \langle e \in E_{n+1} \setminus E_n \mid \sigma(e) \preceq \alpha \rangle_{\mathbb{C}}. \end{aligned} \tag{3}$$
Тогда ι_n — это вложение гладких алгебраических многообразий, причём существует биекция между $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ и индуктивным пределом этой цепи вложений, см. [DP1, Proposition 5.2] или [FP1, Section 3.3]. Более того, эта структура инд-многообразия на $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ не зависит от выбора исчерпания $\{E_n\}$ базиса E.

Есть другой способ описать вложения ι_n, который иногда более удобен. Для начала для всех $n \geqslant 1$ положим $\mathcal{V}_n = \langle e_1, \ \ldots, \ e_n \rangle_{\mathbb{C}}$. Для каждого $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ выберем целое неотрицательное число $n_{\mathcal{G}}$, для которого $\mathcal{G}$ совместим с базисом, содержащим $\{e_n, \ n > n_{\mathcal{G}}\}$, и $\mathcal{V}_{n_{\mathcal{G}}}$ содержит подпространство, делающее эти обобщённые флаги E-соизмеримыми; очевидно, мы можем положить $n_{\mathcal{F}} = 0$. При $n \geqslant n_{\mathcal{G}}$ положим также

$$\mathcal{G}(n) = \{W \cap \mathcal{V}_n, \ W \in \mathcal{G}\}.$$

Для любого $n \geqslant 1$ размерности пространств флага $\mathcal{F}(n)$ образуют последовательность целых чисел

$$0 = d_{n,0} < d_{n,1} < \ldots < d_{n,d_{n,s_n-1}} < d_{n,s_n} = n = \dim \mathcal{V}_n.$$

Пусть $\mathcal{F}\ell(d_n, \mathcal{V}_n)$ — многообразие флагов типа $d_n = (d_{n,1}, \ldots, d_{n,s_n-1})$ в пространстве $\mathcal{V}_n$. Поскольку либо $s_{n+1} = s_n$, либо $s_{n+1} = s_n + 1$, существует единственное j_n такое, что $d_{n+1,i} = d_{n,i} + 1$ при $0 \leqslant i < j_n$ и $d_{n+1,j_n} > d_{n,j_n}$. Тогда для $j_n \leqslant i < s_n$ имеем $d_{n+1,i} = d_{n,i} + 1$ в случае $s_{n+1} = s_n$ и $d_{n+1,i} = d_{n,i-1} + 1$ в случае $s_{n+1} = s_n + 1$. Другими словами, $j_n \leqslant s_n$ — это минимальное ненулевое целое число, для которого найдётся $\alpha \in \mathcal{A}$ такой, что

$$\dim F''_\alpha \cap \mathcal{V}_{n+1} = \dim F''_\alpha \cap \mathcal{V}_n + 1.$$

Для каждого n мы определяем вложение

$$\xi_n \colon \mathcal{F}\ell(d_n, \mathcal{V}_n) \hookrightarrow \mathcal{F}\ell(d_{n+1}, \mathcal{V}_{n+1})$$

так: флаг

$$\mathcal{G}_n = \{\{0\} = G^n_0 \subset G^n_1 \subset \ldots \subset G^n_{s_n} = \mathcal{V}_n\} \in \mathcal{F}\ell(d_n, \mathcal{V}_n)$$

будет переводиться в

$$\xi_n(\mathcal{G}_n) = \mathcal{G}_{n+1} = \{\{0\} = G^{n+1}_0 \subset G^{n+1}_1 \subset \ldots \subset G^{n+1}_{s_{n+1}} = \mathcal{V}_{n+1}\} \in \mathcal{F}\ell(d_{n+1}, \mathcal{V}_{n+1}),$$

где

$$G^{n+1}_i = \begin{cases} G^n_i, & \text{если } 0 \leqslant i < j_n, \\ G^n_i \oplus \mathbb{C}e_{n+1}, & \text{если } j_n \leqslant i \leqslant s_{n+1} \text{ и } s_{n+1} = s_n, \\ G^n_{i-1} \oplus \mathbb{C}e_{n+1}, & \text{если } j_n \leqslant i \leqslant s_{n+1} \text{ и } s_{n+1} = s_n + 1. \end{cases} \tag{4}$$

Заметим, что $\xi_n(\mathcal{G}(n)) = \mathcal{G}(n+1)$ для всех $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ и $n \geqslant n_{\mathcal{G}}$.

Напомним теперь, что у нас имеется исчерпание базиса E его конечными подмножествами $\{E_n\}$. Обозначим $m_n = |E_n| = \dim V_n$. Тогда, согласно (3),

$$\iota_n = \xi_{m_{n+1}-1} \circ \xi_{m_{n+1}-2} \circ \ldots \circ \xi_{m_n}.$$

Упоминавшаяся выше биекция

$$\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E) \to \varinjlim \mathcal{F}\ell(d_{m_n}, V_n)$$

имеет теперь вид $\mathcal{G} \mapsto \varinjlim \mathcal{G}(n)$. Допуская некоторую вольность речи, в дальнейшем мы будем обозначать канонические вложения

$$\mathcal{F}\ell(d_{m_n}, V_n) \hookrightarrow \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$$

той же самой буквой ι_n.

Мы закончим это параграф некоторыми основными примерами инд-многообразий обобщённых флагов, которые мы будем использовать на протяжении всей статьи.

Пример 2.7. i) Первый пример обобщённых флагов даёт флаг

$$\mathcal{F} = \{\{0\} \subset F \subset V\},$$

где F — собственное подпространство пространства V. Здесь $\mathcal{F}' = \{\{0\} \subset F\}$, $\mathcal{F}'' = \{F \subset V\}$. Если $\mathcal{F}$ совместим с E, то $E \cap F$ является базисом F, то есть $F = \langle \sigma \rangle_{\mathbb{C}}$ для некоторого подмножества σ в E. Инд-многообразие $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ называется *инд-грассманианом* и обозначается $\mathrm{Gr}(F, E)$. Если $k = \dim F$ конечно, то флаг $\{\{0\} \subset F' \subset V\}$ будет E-соизмеримым с $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $\dim F = k$, поэтому $\mathrm{Gr}(F, E)$ зависит только от k, и мы обозначаем его $\mathrm{Gr}(k) = \mathrm{Gr}(k, V)$.

Аналогично, если $k = \operatorname{codim}_V F$ конечно, то $\mathrm{Gr}(F, E)$ зависит только от E и k (но не от F) и изоморфен $\mathrm{Gr}(k, V_*)$: изоморфизм

$$\mathrm{Gr}(F, E) \to \{F \subset V_* \mid \dim F = k\} = \mathrm{Gr}(k, V_*)$$

индуцирован отображением

$$\mathrm{Gr}(F, E) \ni U \mapsto U^{\#} = \{\phi \in V_* \mid \phi(x) = 0 \text{ для всех } x \in U\}.$$

Наконец, если и размерность, и коразмерность пространства F бесконечны, то $\mathrm{Gr}(F, E)$ зависит от F и E, но все такие инд-многообразия изоморфны и будут обозначаться через $\mathrm{Gr}(\infty)$, детали см. в [PT1] или [FP1, Section 4.5].

ii) Наш второй пример — это обобщённый флаг

$$\mathcal{F} = \{\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \ldots\},$$

где $F_i = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle_{\mathbb{C}}$ для всех $i \geqslant 1$. Очевидно, что это флаг. Флаг

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \{\{0\} = \widetilde{F}_0 \subset \widetilde{F}_1 \subset \ldots\}$$

будет E-соизмеримым с $\mathcal{F}$ в том и только том случае, когда $\dim F_i = \dim \widetilde{F}_i$ для всех i и $F_i = \widetilde{F}_i$ для достаточно больших i. Флаг $\mathcal{F}$ максимален, причём $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}'' = \mathcal{F} \setminus \{0\}$.

iii) Далее, положим $\mathcal{F} = \{\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_{-2} \subset F_{-1} \subset V\}$, где

$$F_i = \langle e_1,\ e_3,\ \ldots, e_{2i-1} \rangle_{\mathbb{C}},\ F_{-i} = \langle \{e_j,\ j \text{ нечётно}\} \cup \{e_{2j},\ j > i\} \rangle_{\mathbb{C}}$$

при $i \geqslant 1$. Этот обобщённый флаг максимален и, конечно, не является флагом. Здесь $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus V$, $\mathcal{F}'' = \mathcal{F} \setminus \{0\}$. Отметим также, что из условия $\widetilde{\mathcal{F}} \in X = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ не вытекает, что $\widetilde{F}_i = F_i$ для всех достаточно больших i. Например, пусть $\widetilde{F}_1 = \mathbb{C}e_2$, $\widetilde{F}_i = \langle e_2,\ e_3,\ e_5,\ e_7,\ \ldots,\ e_{2i-1} \rangle_{\mathbb{C}}$ при $i > 1$, а

$$\widetilde{F}_{-i} = \langle \{e_j,\ j \text{ нечётно},\ j \geqslant 3\} \cup \{e_2\} \cup \{e_{2j}, j > i\} \rangle_{\mathbb{C}},\ i \geqslant 1,$$

тогда $\widetilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$, но $\widetilde{F}_i \neq F_i$ для всех i.

iv) Пусть теперь $\mathcal{F} = \{\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F \subset F_{-1} \subset F_{-2} \subset \ldots\}$, где

$$F_i = \langle e_1,\ e_3,\ \ldots, e_{2i-1} \rangle_{\mathbb{C}},\ F = \langle e_j,\ j \text{ нечётно} \rangle_{\mathbb{C}},\ F_{-i} = \langle \{e_J,\ j \text{ нечётно}\} \cup \{e_{2j},\ 1 \leqslant j \leqslant i\} \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Цепь $\mathcal{F}$ является максимальным обобщённым флагом, но не флагом. Обратим внимание, что у пространства F нет непосредственного предшественника. Здесь $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}'' = \mathcal{F} \setminus (\{0\} \cup F)$.

v) Наконец, пусть $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел. Зафиксируем биекцию $\sigma\colon E \to \mathbb{Q}$ и для каждого $\alpha \in \mathbb{Q}$ положим

$$F'_\alpha = \langle e \in E,\ \sigma(e) < \alpha \rangle_{\mathbb{C}},\ F''_\alpha = \langle e \in E,\ \sigma(e) \leqslant \alpha \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Подпространства $\{F'_\alpha,\ F''_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Q}}$ образуют максимальный обобщённый флаг $\mathcal{F}$ с $\mathcal{A} = \mathbb{Q}$. Разумеется, $\mathcal{F}$ не будет флагом. Ни одно из подпространств F'_α не обладает непосредственным предшественником, и ни одно из подпространств F''_α не обладает непосредственным потомком, так что $\mathcal{F}' = \{F'_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Q}}$ и $\mathcal{F}'' = \{F''_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Q}}$.

Более того, обратим внимание, что цепь $\mathcal{F}$ не максимальна среди всех цепей подпространств пространства V. Действительно, для любого $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ положим $C_\gamma = \langle e \in E,\ \sigma(e) < \gamma \rangle_{\mathbb{C}}$. Подпространства $\{F'_\alpha,\ F''_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Q}} \sqcup \{C_\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ образуют максимальную цепь $\mathcal{C}$ подпространств в V, и ясно, что $\mathcal{F}$ — собственная подцепь в $\mathcal{C}$. Цепь $\mathcal{C}$ параметризована «симметрическими сечениями Дедекинда поля $\mathbb{Q}$»: точка из $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ соответствует одному сечению, а точка из $\mathbb{Q}$ — двум сечениям, в одном из которых есть максимум, а в другом — минимум.

2.3. Изотропные обобщённые флаги. В этом параграфе мы будем предполагать, что пространство V снабжено невырожденной симметрической или кососимметрической билинейной формой β, для которой $\beta(e, V_n) = 0$ при $e \in E \setminus E_n$, как в примере 2.4 ii). Если $U \subset V$, то мы пишем $U^\perp = \{x \in V \mid \beta(x, y) = 0 \text{ для всех } y \in U\}$, то есть $U^\perp$ — это наибольшее подпространство в V, ортогональное к U относительно формы β. Мы будем полагать, что базис E является *β-изотропным* (или, что равносильно, *изотропным*), то есть что существует инволюция $i_E \colon E \to E$, у которой не больше одной неподвижной точки, удовлетворяющая условию $\beta(e, e') = 0$ при всех $e,\ e' \in E$, для которых $e' \neq i_E(e)$ (здесь e и e' могут совпадать).

Определение 2.8. Обобщённый флаг $\mathcal{F}$ называется *β-изотропным* (или просто *изотропным*), если $F^\perp \in \mathcal{F}$ для каждого $F \in \mathcal{F}$, причём отображение $i_\mathcal{F} \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F},\ F \mapsto F^\perp$, является инволютивным антиавтоморфизмом упорядоченного множества $\mathcal{F}$, то есть биекцией, обращающей порядок включений. Отметим, что эта инволюция на $\mathcal{F}$ задаёт инволюцию

$$i_\mathcal{A} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A} \colon (F'_\alpha, F''_\alpha) \mapsto ((F''_\alpha)^\perp, (F'_\alpha)^\perp).$$

Предположим, что обобщённый флаг $\mathcal{F}$ является β-изотропным. Из определения вытекает, что каждый β-изотропный флаг имеет вид $\mathcal{G} \cup \mathcal{G}^\perp$, где $\mathcal{G}$ состоит из изотропных подпространств в V, а $\mathcal{G}^\perp$ — из ортогональных к ним подпространств. Обозначим через U объединение всех подпространств из $\mathcal{F}$, принадлежащих $\mathcal{G}$. Тогда U — изотропное подпространство в V, $\mathcal{G}$ — обобщённый флаг в U (возможно, содержащий U как элемент) и $\mathcal{F}$ однозначно восстанавливается по его пересечению $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap U$ с подпространством U. Более того, U будет максимальным изотропным подпространством в V тогда и только тогда, когда обобщённый флаг $\mathcal{F}$ максимален.

Рассуждая, как в доказательстве предложения 2.6, можно показать, что каждый β-изотропный обобщённый флаг обладает совместимым β-изотропным базисом. До конца параграфа мы будем предполагать, что $\mathcal{F}$ является β-изотропным и совместимым с данным β-изотропным базисом E. Допустим теперь, что обобщённый флаг $\widetilde{\mathcal{F}}$ тоже β-изотропен и E-соизмерим с $\mathcal{F}$. В частности, множество $\widetilde{\mathcal{F}}^\dagger$ ближайших друг к другу подпространств из $\widetilde{\mathcal{F}}$ изоморфно $\mathcal{A}$, и инволюция $i_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ индуцирует ту же инволюцию $i_\mathcal{A}$ на упорядоченном множестве $\mathcal{A}$, что и $i_\mathcal{F}$. Следующая лемма доказана в [FP1, Subsection 3.1, Lemma1].

Лемма 2.9. i) *Существует β-изотропный базис L такой, что $E \setminus (E \cap L)$ конечно и $\widetilde{\mathcal{F}}$ совместим с L.* ii) *Если $\widetilde{\mathcal{F}}$ совместим с β-изотропным базисом L с помощью сюръективного отображения $\sigma \colon L \to \mathcal{A}$, то*

$$\sigma \circ i_L = i_\mathcal{A} \circ \sigma.$$

Доказательство. i) Обозначим через L' базис V, для которого множество $E \setminus (E \cap L')$ конечно и $\widetilde{\mathcal{F}}$ совместим с L'. Выберем инвариантное относительно инволюции i_E подмножество $E' \subset E$, не содержащее неподвижных относительно i_E точек, для которого $E \setminus E'$ конечно и $E' \subset E \cap L'$. Тогда подпространство $V'' = \langle E \setminus E' \rangle_\mathbb{C}$ конечномерно, а ограничение β на V'' невырожденно. Пересечение $\{\widetilde{F} \cap V'',\ \widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{F}}\}$ является изотропным флагом в V''. Поскольку V'' конечномерно, существует β-изотропный базис E'' в V'', с которым этот изотропный флаг будет совместим. Тогда $L = E' \cup E''$ — нужный нам базис.

ii) По определению совместимости, $e \in \widetilde{F}''_{\sigma(e)} \setminus \widetilde{F}'_{\sigma(e)}$ для всех $e \in L$, поэтому

$$i_L(e) \in (\widetilde{F}'_{\sigma(e)})^\perp \setminus (\widetilde{F}''_{\sigma(e)})^\perp.$$

Это завершает доказательство. □

Обозначим теперь через $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$ множество всех β-изотропных флагов в V, E-соизмеримых с $\mathcal{F}$. Чтобы ввести на $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$ структуру инд-многообразия, предположим, что в исчерпании $\{E_n\}$ базиса E все подмножества E_n инвариантны относительно i_E. Напомним, что в предыдущем параграфе было дано определение $\mathcal{F}\ell_n$. Пусть $U^{\perp, V_n} \subset V_n$ — подпространство в V_n, ортогональное пространству $U \subset V_n$ относительно формы β_n. Пусть $\mathcal{F}\ell_n^\beta$ — замкнутое подмногообразие в $\mathcal{F}\ell_n$, состоящее из всех флагов $\{U'_\alpha, U''_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ многообразия $\mathcal{F}\ell_n$, для которых

$$((U''_\alpha)^{\perp,V_n}, (U'_\alpha)^{\perp,V_n}) = (U'_{i_\mathcal{A}(\alpha)}, U''_{i_\mathcal{A}(\alpha)}) \text{ для всех } \alpha \in \mathcal{A}.$$

Тогда вложение $\iota_n\colon \mathcal{F}\ell_n \hookrightarrow \mathcal{F}\ell_{n+1}$, определённое формулой (3), ограничивается до вложения

$$\iota_n^\beta\colon \mathcal{F}\ell_n^\beta \hookrightarrow \mathcal{F}\ell_{n+1}^\beta.$$

Значит, мы получаем цепь вложений проективных многообразий

$$\mathcal{F}\ell_1^\beta \overset{\iota_1^\beta}{\hookrightarrow} \mathcal{F}\ell_2^\beta \overset{\iota_2^\beta}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\iota_{n-1}^\beta}{\hookrightarrow} \mathcal{F}\ell_n^\beta \overset{\iota_n^\beta}{\hookrightarrow} \mathcal{F}\ell_{n+1}^\beta \overset{\iota_{n+1}^\beta}{\hookrightarrow} \ldots.$$

Существует биекция между $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F},\beta,E)$ и индуктивным пределом $\varinjlim \mathcal{F}\ell_n^\beta$ этой цепи вложений. Итак, $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F},\beta,E)$ снабжено структурой инд-многообразия, не зависящей от выбора исчерпания E. Более того, $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F},\beta,E)$ — замкнутое инд-подмногообразие в $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F},E)$, см. [DP1] или [FP1].

Пример 2.10. i) Пусть F — изотропное подпространство пространства V, а U — максимальное изотропное подпространство в V, содержащее F. Отметим, что U всегда бесконечномерно. Положим $\mathcal{F} = \{\{0\} \subset F \subset F^\perp \subset V\}$. Тогда $\mathcal{F}$ — β-изотропный флаг в V. Пусть E — β-изотропный базис V, совместимый с флагом $\mathcal{F}$. Если $\dim F = k < \infty$, то соответствующее инд-многообразие $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F},\beta,E)$ будем обозначать через $\mathrm{Gr}^\beta(k) = \mathrm{Gr}^\beta(k,V)$. В общем случае мы обозначаем соответствующее инд-многообразие через $\mathrm{Gr}^\beta(F,E)$ и называем его *изотропным инд-грассманианом.* Обратим внимание, что если, к примеру, $F = U$, то существуют максимальные изотропные подпространства пространства V, не содержащиеся в $\mathrm{Gr}^\beta(U,E)$.

ii) Пусть $\mathcal{F} = \{\ldots \subset F_{-2} \subset F_{-1} \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F \subset F'_1 \subset F'_2 \subset \ldots\}$ где при $i > 0$

$$\begin{aligned}
F_{-i} &= \langle e_{3j},\ j \geqslant i\rangle_\mathbb{C},\\
F_i &= \langle \{e_{3j},\ j \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \{e_{3j-1},\ 1 \leqslant j \leqslant i\}\rangle_\mathbb{C},\\
F &= \langle e_{3j},\ e_{3j-1},\ j \in \mathbb{Z}_{>0}\rangle_\mathbb{C},\\
F'_i &= \langle \{e_{3j},\ e_{3j-1},\ j \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \{e_{3j-2},\ 1 \leqslant j \leqslant i\}\rangle_\mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}'' = \mathcal{F} \setminus \{F\}$ и не существует невырожденной симметрической или кососимметрической билинейной формы β на V, относительно которой $\mathcal{F}$ был бы изотропным. В самом деле, ясно, что на $\mathcal{F}$ не существует инволютивного антиавтоморфизма, потому что ровно у одного подпространства из $\mathcal{F}$ нет непосредственного предшественника, в то время как все подпространства из $\mathcal{F}$ обладают непосредственными потомками.

3. Линейные инд-грассманианы

В этой главе мы обсуждаем более общий подход к определению инд-грассманиана, основанный на понятии линейного вложения конечномерных грассманианов. Приведённая ниже теорема 3.8 гласит, что каждое инд-многообразие, полученное как индуктивный предел линейных вложений грассманианов, изоморфно одному из стандартных инд-грассманианов, определённых в примерах 2.7 i) и 2.10 i). Этот материал взят из работы [PT1].

3.1. Определение линейных инд-грассманианов. Будем через $\operatorname{Pic} X$ обозначать группу Пикара алгебраического многообразия X, то есть группу классов изоморфизма линейных расслоений. Групповая операция здесь — тензорное произведение. Если многообразие X проективно и его группа Пикара изоморфна группе $\mathbb{Z}$, то договоримся через $\mathcal{O}_X(1)$ обозначать обильную образующую группы Пикара и писать $\mathcal{O}_X(n) = \mathcal{O}_X(1)^{\otimes n}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Отметим, что каждый морфизм алгебраических многообразий $\varphi\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм групп $\varphi^*\colon \operatorname{Pic} Y \to \operatorname{Pic} X$.

Если X — инд-многообразие, получающееся как индуктивный предел цепи морфизмов алгебраических многообразий

$$X_1 \overset{\varphi_1}{\to} X_2 \overset{\varphi_2}{\to} \ldots \overset{\varphi_{n-1}}{\to} X_n \overset{\varphi_n}{\to} X_{n+1} \overset{\varphi_{n+1}}{\to} \ldots,$$

то, по определению, *группой Пикара* инд-многообразия X называется прективный предел

$$\operatorname{Pic} X = \varprojlim \operatorname{Pic} X_n$$

цепи гомоморфизмов групп

$$\operatorname{Pic} X_1 \xleftarrow{\varphi_1^*} \operatorname{Pic} X_2 \xleftarrow{\varphi_2^*} \ldots \xleftarrow{\varphi_{n-1}^*} \operatorname{Pic} X_n \xleftarrow{\varphi_n^*} \operatorname{Pic} X_{n+1} \xleftarrow{\varphi_{n+1}^*} \ldots.$$

Ясно, что каждый морфизм инд-многообразий индуцирует гомоморфизм их групп Пикара $\varphi^*\colon \operatorname{Pic} Y \to \operatorname{Pic} X$.

Определение 3.1. Морфизм алгебраических многообразий $\varphi\colon X \to Y$ называется *линейным*, если φ^* является эпиморфизмом.

Пусть, к примеру, $X = \operatorname{Gr}(k, W)$ — грассманиан k-мерных подпространств n-мерного векторного пространства W. Тогда $\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}$ и $\mathcal{O}_X(1) \cong \bigwedge^k S_X^*$, где S_X — тавтологическое расслоение на X. Если Y — тоже грассманиан, то морфизм $\varphi\colon X \to Y$ линеен тогда и только тогда, когда $\varphi^*\mathcal{O}_Y(1) = \mathcal{O}_X(1)$.

В дальнейшем мы также будем рассматривать ортогональные и симплектические грассманианы. Предположим, что конечномерное векторное пространство W снабжено невырожденной симметрической или кососимметрической билинейной формой β. Для любого $k \leqslant [\dim W/2]$ назовём *изотропным грассманианом* $\operatorname{Gr}^\beta(k, W)$ подмногообразие в $\operatorname{Gr}(k, W)$, состоящее из всех k-мерных изотропных подпространств пространства W. Если β симметрична (соответственно, кососимметрична), то $\operatorname{Gr}^\beta(k, W)$ называется *ортогональным* (соответственно, *симплектическим*).

До конца главы мы будем считать, что если форма β симметрична, то $\dim W \geqslant 7$ и $k \neq (\dim W)/2$, $k \neq (\dim W)/2 - 1$. Хорошо известно, что многообразие $\operatorname{Gr}^\beta(k, W)$ гладко и

$$\dim \operatorname{Gr}^\beta(k, W) = \begin{cases} k \dim W - k(3k+1)/2, & \text{если } \beta \text{ симметрична}, \\ k \dim W - k(3k-1)/2, & \text{если } \beta \text{ кососимметрична}. \end{cases}$$

Более того, $\operatorname{Pic} \operatorname{Gr}^\beta(k, W) = \mathbb{Z}\mathcal{O}_{\operatorname{Gr}^\beta(k,W)}(1)$, где $\mathcal{O}_{\operatorname{Gr}^\beta(k,W)}(1)$ удовлетворяет следующему условию: пусть $\tau\colon \operatorname{Gr}^\beta(k, W) \hookrightarrow \operatorname{Gr}(k, W)$ — тавтологическое расслоение, тогда

$$\tau^*\mathcal{O}_{\operatorname{Gr}(k,W)}(1) = \begin{cases} \mathcal{O}_{\operatorname{Gr}^\beta(k,W)}(2), & \text{если } \beta \text{ симметрична и } k = [\dim W/2], \\ \mathcal{O}_{\operatorname{Gr}^\beta(k,W)}(1) & \text{иначе}. \end{cases}$$

Заметим, что морфизм ортогональных или симплектических грассманианов $\varphi\colon X \to Y$ линеен в том и только том случае, когда $\varphi^*\mathcal{O}_Y(1) = \mathcal{O}_X(1)$.

Определение 3.2. *Линейным инд-грассманианом* называется инд-многообразие X, которое может быть получено как индуктивный предел $\varinjlim X_n$ цепи вложений

$$X_1 \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} X_2 \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\varphi_{n-1}}{\hookrightarrow} X_n \overset{\varphi_n}{\hookrightarrow} X_{n+1} \overset{\varphi_{n+1}}{\hookrightarrow} \ldots,$$

где каждое X_n — обычный или изотропный грассманиан с условием $\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}$, $\lim_{n\to\infty} \dim X_n = \infty$, а все вложения φ_n линейны. Обратим внимание, что мы допускаем смесь всех трёх типов грассманианов (обычных, ортогональных и симплектических).

Пример 3.3. Пусть V и E такие же, как выше, а F — такое подпространство в V, что флаг $\mathcal{F} = \{\{0\} \subset F \subset V\}$ совместим с E. Положим $\operatorname{Gr}(F, E) = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$, как в примере 2.7 i). Тогда $\operatorname{Gr}(F, E) \cap V_n = \operatorname{Gr}(d_n, V_n)$, где $d_n = \dim F \cap V_n$, и вложение $\iota_n\colon \operatorname{Gr}(d_n, V_n) \hookrightarrow \operatorname{Gr}(d_{n+1}, V_{n+1})$ имеет простой вид

$$\iota_n(A) = A \oplus U_{n+1},\ A \in \operatorname{Gr}(d_n, V_n),$$

где U_{n+1} — подпространство V_{n+1}, натянутое на какие-то базисные векторы из $E_{n+1} \setminus E_n$, см. (4). Все такие вложения ι_n, очевидно, линейны, поэтому инд-многообразие $\operatorname{Gr}(F, E)$ является линейным инд-грассманианом.

3.2. Стандартные расширения. Ключевая идея в описании линейных инд-грассманианов заключается в том, что каждый из них изоморфен индуктивному пределу цепи некоторых стандартных вложений.

Определение 3.4. Пусть X, X' — обычные грассманианы. Вложение $\widetilde{\varphi}\colon X \to X'$ называется *стандартным расширением*, если существуют изоморфизмы $j_X\colon X \to \mathrm{Gr}(k, W)$, $j_{X'}\colon X' \to \mathrm{Gr}(k', W')$ и вложение $\varphi\colon \mathrm{Gr}(k, W) \to \mathrm{Gr}(k', W')$, $\dim W' \geqslant \dim W$, $k' \geqslant k$, такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "j_X"] & X' \arrow[d, "j_{X'}"] \\ \mathrm{Gr}(k, W) \arrow[r, hook, "\varphi"] & \mathrm{Gr}(k', W') \end{tikzcd}$$

коммутативна, причём φ задаётся формулой

$$\varphi(A) = A \oplus U,\ A \in \mathrm{Gr}(k, W), \tag{5}$$

для какого-то фиксированного изоморфизма $W' \cong W \oplus U'$ и фиксированного подпространства $U \subset U'$ размерности $k' - k$. Отметим, что $\dim W' - \dim W = \dim U' \geqslant \dim U = k' - k$, поэтому $\dim W' - k' \geqslant \dim W - k$.

Например, все вложения, рассматриваемые в примере 3.3, являются стандартными расширениями. Понятно, что композиция двух стандартных расширений сама будет стандартным расширением.

Далее мы будем говорить, что стандартное расширение $\varphi\colon \mathrm{Gr}(k, W) \to \mathrm{Gr}(k', W')$ является *строгим*, если $j_{\mathrm{Gr}(k,W)}$ и $j_{\mathrm{Gr}(k',W')}$ — автоморфизмы. Если $\varphi\colon \mathrm{Gr}(k, W) \to \mathrm{Gr}(k', W')$ — строгое стандартное расширение, то изоморфизм $W' \cong W \oplus U'$ всегда может быть выбран так, чтобы φ задавалось просто формулой (5). Очевидно, композиция двух строгих стандартных расширений сама является строгим стандартным расширением. Заметим, что если $\varphi\colon \mathrm{Gr}(k, W) \to \mathrm{Gr}(k', W')$ — строгое стандартное расширение, то U восстанавливается по формуле

$$U = \bigcap\nolimits_{A \in \mathrm{Gr}(k,V)} \varphi(A).$$

Положим также

$$U^\sharp = \langle \varphi(A),\ A \in \mathrm{Gr}(k, W)\rangle_{\mathbb{C}}\,,$$

тогда φ определяется сюръективное линейное отображение $\varphi^\sharp\colon U^\sharp \to W$с ядром U, для которого $\left(\varphi^\sharp\right)^{-1}(A) = \varphi(A)$ при всех $A \in \mathrm{Gr}(k, V)$. Легко проверить, что задание стандартного расширения φ — это то же самое, что задание тройки $(U, U^\sharp, \varphi^\sharp)$.

Предположим теперь, что конечномерные пространства W и W' снабжены невырожденными билинейными формами β и β' соответственно, причём формы β и β' обе симметричны или обе кососимметричны. Вложение $\varphi\colon \mathrm{Gr}^\beta(k, W) \hookrightarrow \mathrm{Gr}^\beta(k', W')$ называется *стандартным расширением*, если φ задаётся формулой (5), где $W' \cong W \oplus U'$ является изометрией, а U — изотропное подпространство в U'.

Как и в обычном случае, стандартное расширение изотропных грассманианов может быть определено следующими линейно-алгебраическими данными. Выберем флаг $\{U \subset U^\sharp\}$ в W' с изотропным U, для которого найдётся сюръективное линейное отображение $\varphi^\sharp\colon U^\sharp \to W$ с ядром U такое, что билинейная форма $\left(\varphi^\sharp\right)^*\beta$ совпадает с ограничением формы β' на $U^\sharp$. Эти данные определяют вложение $\varphi\colon \mathrm{Gr}^\beta(k, W) \hookrightarrow \mathrm{Gr}^\beta(k', W')$ по формуле

$$\varphi(A) = \left(\varphi^\sharp\right)^{-1}(A) \subset U^\sharp \subset W',\ A \in \mathrm{Gr}^\beta(k, W).$$

Более того,

$$U = \bigcap\nolimits_{A \in \mathrm{Gr}^\beta(k,W)} \varphi(A),\ U^\sharp = \langle \varphi(A),\ A \in \mathrm{Gr}^\beta(k, W)\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Чтобы сформулировать первый основной результат этой главы, нам потребуется ещё несколько определений. Пусть $\widetilde{W}$ — изотропное подпространство пространства W. Для любого $k \leqslant \dim \widetilde{W}$ будем называть естественные вложения $\mathrm{Gr}(k, \widetilde{W}) \hookrightarrow \mathrm{Gr}^\beta(k, W)$ и $\mathrm{Gr}(\dim \widetilde{W} - k, \widetilde{W}^*) \hookrightarrow \mathrm{Gr}^\beta(k, W)$

изотропными расширениями. По определению, *комбинация изотропных и стандартных расширений* — это вложение вида

$$\mathrm{Gr}^\beta(k,W) \overset{\tau}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k,W) \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k'',\widetilde{W}'') \overset{b}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}^\beta(k'',W'') \overset{\psi}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}^\beta(k',W'),$$

где $\widetilde{W}''$ — какое-то изотропное подпространство в W'', τ — тавтологическое вложение, φ и ψ — стандартные расширения, а b — изотропное расширение. Легко проверить, что композиция комбинаций изотропных и стандартных расширений сама будет комбинацией изотропных и стандартных расширений.

Под *проективным пространством в* (или *на*) многообразии (или инд-многообразии) X мы понимаем линейно вложенное подмногообразие X, изоморфное проективному пространству. Аналогично, под *квадрикой на* X размерности $m \geqslant 3$ мы будем понимать линейно вложенное подмногообразие X, изоморфное гладкой m-мерной квадрике. (Для квадрик на X размерностей 1 и 2 определение несколько отличается, детали см. в [PT1, Subsection 2.2].)

Предположим теперь, что X и Y — обычные (соответственно, ортогональные или симплектические) грассманианы. В случае ортогональных грассманианов вида $\mathrm{Gr}^\beta(k,W)$ и $\mathrm{Gr}^\beta(k',W')$ соответственно будем дополнительно предполагать, что либо $k \leqslant [(\dim W)/2]-3$, $k' \leqslant [(\dim W')/2]-3$, либо обе $\dim W$, $\dim W'$ нечётны и $[(\dim W')/2]-k' \leqslant [(\dim W)/2]-k \leqslant 2$.

Непосредственно из определений вытекает, что стандартные расширения и комбинации изотропных и стандартных расширений являются линейными морфизмами.

Следующая теорема — центральный результат в классификации линейных инд-грассманианов, см. параграф 3.3. Мы приглашаем читателя ознакомиться с доказательством теоремы 3.5 по оригинальной статье [PT1, Theorem 1].

Теорема 3.5. *Пусть* $\varphi\colon X \to Y$ *— линейный морфизм. Тогда верно одно из следующих утверждений*:

a) φ *— стандартное расширение*;

b) X *и* Y *— изотропные грассманианы,*
а φ *— комбинация изотропных и стандартных расширений*;

c) φ *пропускается через проективное пространство в* Y
или, в случае ортогональных грассманианов, через максимальную квадрику на Y.

В частности, если φ не пропускается через проективное пространство в Y (или, в случае ортогональных грассманианов, через максимальную квадрику на Y), то он обязательно является вложением.

3.3. Классификация линейных инд-грассманианов. В этом параграфе мы объясняем, почему каждый линейный (возможно, изотропный) инд-грассманиан изоморфен одному из стандартных (возможно, изотропных) инд-грассманианов, определённых ниже.

Пусть V — счётномерное пространств, E — базис V, $E = \bigcup E_n$ — его исчерпание конечными подмножествами, $V = \bigcup V_n$ — соответствующее исчерпание пространства V конечномерными подпространствами $V_n = \langle E_n \rangle_{\mathbb{C}}$. Обозначим через $\mathrm{Gr}(k)$ индуктивный предел последовательности

$$\mathrm{Gr}(k,V_1) \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k,V_2) \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\varphi_{n-1}}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k,V_n) \overset{\varphi_n}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k,V_{n+1}) \overset{\varphi_{n+1}}{\hookrightarrow} \ldots,$$

где $k \geqslant 1$ — целое число, а все φ_n — канонические вложения грассманианов.

Обозначим также через $\mathrm{Gr}(\infty)$ индуктивный предел последовательности

$$\mathrm{Gr}(k_1,V_1) \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k_2,V_2) \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\varphi_{n-1}}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k_n,V_n) \overset{\varphi_n}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k_{n+1},V_{n+1}) \overset{\varphi_{n+1}}{\hookrightarrow} \ldots,$$

где $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots$ — целые числа, удовлетворяющие условию $\lim_{n\to\infty}(\dim V_n - k_n) = \infty$, а все φ_n — стандартные расширения.

В ортогональном и симплектическом случаях предположим, что V снабжено невырожденной симметрической или кососимметрической формой β соответственно так, что ограничение β на

V_n невырожденно для всех n. Здесь мы не предполагаем, что векторы e ортогональны подпространству V_n при $e \in E \setminus E_n$. Зафиксируем целое число $1 \leqslant k \leqslant [(\dim V_1)/2]$. Обозначим через $\mathrm{Gr}^{\beta}(k, \infty)$ индуктивный предел цепи

$$\mathrm{Gr}^{\beta_1}(k, V_1) \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}^{\beta_2}(k, V_2) \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\varphi_{n-1}}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}^{\beta_n}(k, V_n) \overset{\varphi_n}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}^{\beta_{n+1}}(k, V_{n+1}) \overset{\varphi_{n+1}}{\hookrightarrow} \ldots,$$

где β_n обозначает ограничение формы β на V_n, а все морфизмы φ_n — канонические вложения изотропных грассманианов.

Выберем произвольную последовательность целых чисел $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots$, для которой $k_n < [(\dim V_n)/2]$ при всех n (и, следовательно, $\lim_{n\to\infty}(\dim V_n - k_n) = \infty$), и обозначим через $\mathrm{Gr}^{\beta}(\infty, \infty)$ индуктивный предел цепи

$$\mathrm{Gr}^{\beta_1}(k_1, V_1) \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}^{\beta_2}(k_2, V_2) \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\varphi_{n-1}}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}^{\beta_n}(k_n, V_n) \overset{\varphi_n}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}^{\beta_{n+1}}(k_{n+1}, V_{n+1}) \overset{\varphi_{n+1}}{\hookrightarrow} \ldots \tag{6}$$

стандартных вложений изотропных грассманианов.

Далее, в симплектическом случае выберем произвольный набор целых чисел $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots$, удовлетворяющий условиям $k_n < \dim V_n/2$ и $\lim_{n\to\infty}(\dim V_n - k_n) = k \geqslant 2$, и обозначим через $\mathrm{Gr}^{\beta}(\infty, k)$ индуктивный предел (6) цепи стандартных вложений. В ортогональном случае предположим сначала, что $\dim V_n$ чётны для всех n, и тогда определим $\mathrm{Gr}_0^{\beta}(\infty, k)$ как индуктивный предел цепи (6), где $k_n < (\dim V_n)/2$ и $\lim_{n\to\infty}(\dim V_n - k_n) = k \geqslant 2$. Наконец, если $\dim V_n$ нечётны для всех n в ортогональном случае, то обозначим через $\mathrm{Gr}_1^{\beta}(\infty, k)$ индуктивный предел цепи (6) с условиями $k_n < [(\dim V_n)/2]$ и $\lim_{n\to\infty}(\dim V_n - k_n) = k \geqslant 2$.

Определение 3.6. Описанные выше инд-многообразия называются *стандартными инд-грассманианами.*

Лемма 3.7. *Все стандартные грассманианы корректно определены, то есть не зависят* (*с точностью до изоморфизма инд-многообразий*) *от выбора цепи в их определении.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathrm{Gr}(\infty)$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Предположим, что у нас есть две цепи стандартных расширений

$$\mathrm{Gr}(k_1, V_1) \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k_2, V_2) \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\varphi_{n-1}}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k_n, V_n) \overset{\varphi_n}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k_{n+1}, V_{n+1}) \overset{\varphi_{n+1}}{\hookrightarrow} \ldots,$$

$$\mathrm{Gr}(k_1', V_1') \overset{\varphi_1'}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k_2, V_2') \overset{\varphi_2'}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\varphi_{n-1}}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k_n, V_n') \overset{\varphi_n'}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k_{n+1}, V_{n+1}') \overset{\varphi_{n+1}'}{\hookrightarrow} \ldots,$$

где $E = \bigcup E_n'$ — исчерпание базиса E его конечными подмножествами, $V_n' = \langle E_n' \rangle_{\mathbb{C}}$ и

$$\lim_{n\to\infty} k_n = \lim_{n\to\infty} k_n' = \lim_{n\to\infty} (\dim V_n - k_n) = \lim_{n\to\infty} (\dim V_n' - k_n') = \infty.$$

Мы должны показать, что индуктивные пределы $\mathrm{Gr}(\infty)$ и $\mathrm{Gr}'(\infty)$ этих двух цепей совпадают.

Выберем для этого такое n, что $\dim V_n' \geqslant \dim V_1$, $k_n' \geqslant k_n$, $\dim V_n' - k_n \geqslant \dim V_1 - k_1$, и рассмотрим произвольное строгое стандартное расширение

$$f\colon \mathrm{Gr}(k_1, V_1) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(k_n', V_n').$$

Пусть m таково, что $k_m \geqslant k_n'$, $\dim V_m \geqslant \dim V_n'$ и $\dim V_m - k_m \geqslant \dim V_n' - k_n'$. Обозначим

$$\varphi = \varphi_{m-1} \circ \ldots \varphi_1\colon \mathrm{Gr}(k_1, V_1) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(k_m, V_m).$$

Достаточно построить строгое стандартное расширение

$$g\colon \mathrm{Gr}(k_n', V_n') \hookrightarrow \mathrm{Gr}(k_m, V_n)$$

такое, что $g \circ f = \varphi$. (Тогда, повторяя эту процедуру, мы сможем построить два взаимно обратных морфизма инд-многообразий $\mathrm{Gr}(\infty)$ и $\mathrm{Gr}'(\infty)$.)

Как было замечено выше, строгие стандартные расширения f и φ задаются тройками $(U_f, U_f^{\sharp}, f^{\sharp})$ и $(U_{\varphi}, U_{\varphi}^{\sharp}, \varphi^{\sharp})$ соответственно, где $\{U_f \subset U_f^{\sharp}\}$ и $\{U_{\varphi} \subset U_{\varphi}^{\sharp}\}$ — флаги в пространствах

V_n' и V_m соответственно, $f^\sharp\colon U_f^\sharp \to V_1$ и $\varphi^\sharp\colon U_\varphi^\sharp \to V_1$ — линейные сюръекции и тройки

$$0 \to U_f \hookrightarrow U_f^\sharp \overset{f^\sharp}{\twoheadrightarrow} V_1 \to 0,$$

$$0 \to U_\varphi \hookrightarrow U_\varphi^\sharp \overset{\varphi^\sharp}{\twoheadrightarrow} V_1 \to 0$$

точны.

Поскольку $k_m > k_n'$,

$$\begin{aligned}\dim U_\varphi^\sharp &= \dim V_1 + \dim U_\varphi = \dim V_1 + (k_m - k_1) > \dim V_1 + (k_n' - k_1)\\ &= \dim V_1 + \dim U_f = \dim U_f^\sharp.\end{aligned}$$

Поскольку отображения $f^\sharp$ и $\varphi^\sharp$ сюръективны, существует линейная сюръекция $\varepsilon\colon U_\varphi^\sharp \twoheadrightarrow U_f^\sharp$, удовлетворяющая условию $\varphi^\sharp = f^\sharp \circ \varepsilon$. Тогда ограничение ε на подпространство U_φ будет корректно определённой линейной сюръекцией $U_\varphi \twoheadrightarrow U_f$. Положим $U_g = \operatorname{Ker} \varepsilon$, тогда тройка

$$0 \to U_g \hookrightarrow U_\varphi^\sharp \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} U_f^\sharp \to 0$$

точна. Положим теперь $\widetilde{U}_g^\sharp = U_g \oplus V_n'$, и пусть $\pi\colon \widetilde{U}_g^\sharp \to V_n'$ — проекция на V_n' вдоль подпространства U_g.

Рассмотрим вложения $j\colon U_\varphi^\sharp \hookrightarrow \widetilde{U}_g^\sharp$ и $i\colon \widetilde{U}_g^\sharp \hookrightarrow V_m$, для которых $(i \circ j)|_{U_\varphi^\sharp} = \mathrm{id}_{U_\varphi^\sharp}$ и $\pi \circ j = \varepsilon|_{U_\varphi^\sharp}$. Такие вложения существуют. В самом деле,

$$\begin{aligned}\dim \widetilde{U}_g^\sharp &= \dim U_g + \dim V_n' = (\dim U_\varphi^\sharp - \dim U_f^\sharp) + \dim V_n'\\ &= (k_m - k_n') + \dim V_n' = k_m + (\dim V_n' - k_n') \leqslant k_m + \dim V_m - k_m = \dim V_m.\end{aligned}$$

Пусть теперь Z — подпространство в $U_\varphi^\sharp$ такое, что $\widetilde{U}_\varphi^\sharp = U_g \oplus Z$, тогда $\varepsilon|_Z$ — линейный изоморфизм между Z и $U_f^\sharp$. Отметим, что $\varepsilon(Z) = \varepsilon(U_\varphi^\sharp) = U_f^\sharp$. Если $u \in U_g$, $z \in Z$, то положим $j(u + z) = u + \varepsilon(z)$, тогда $\pi \circ j = \varepsilon|_{U_\varphi^\sharp}$. Далее, пусть T — подпространство в V_n', удовлетворяющее условию $V_n' = U_f^\sharp \oplus T$, тогда для произвольных $u \in U_g$, $\varepsilon(z) \in U_f^\sharp$, $t \in T$ положим $i(u + \varepsilon(z) + t) = u + z + \alpha(t)$, где $\alpha\colon T \hookrightarrow V_m$ — любое вложение, для которого $U_\varphi^\sharp \cap \alpha(T) = 0$. Ясно, что $(i \circ j)|_{U_\varphi^\sharp} = \mathrm{id}_{U_\varphi^\sharp}$, как и требовалось.

Таким образом, если $U_g^\sharp = i(\widetilde{U}_g^\sharp) \subset V_m$, то $\{U_g \subset U_g^\sharp\}$ будет флагом в V_m, снабжённым изоморфизмом $U_g^\sharp/U_g \cong V_n'$. Этот изоморфизм индуцирует сюръекцию $g^\sharp\colon U_g^\sharp \twoheadrightarrow V_n'$ с ядром U_g. Строгое стандартное расширение $g\colon \operatorname{Gr}(k_n', V_n') \hookrightarrow \operatorname{Gr}(k_m, V_m)$, соответствующее тройке $(U_g, U_g^\sharp, g^\sharp)$, удовлетворяют условию $g \circ f = \varphi$, как нам и нужно. □

Обратим внимание, что инд-многообразия $\operatorname{Gr}(k)$ и $\operatorname{Gr}(\infty)$ из примера 2.7 i), — это в точности стандартные неизотропные инд-грассманианы в смысле определения выше, поэтому двусмысленности в обозначениях не возникает. Аналогично, все стандартные изотропные инд-грассманианы представляют классы изоморфизма инд-многообразий $\operatorname{Gr}^\beta(\mathcal{F}, E)$ из примера 2.10 i).

Теперь всё готово, чтобы классифицировать все линейные инд-грассманианы. Второй основной результат этой главы таков (см. [PT1, Theorem2]).

Теорема 3.8. *Каждый линейный инд-грассманиан изоморфен как инд-многообразие одному из стандартных инд-грассманианов* $\operatorname{Gr}(k)$, $\operatorname{Gr}(\infty)$, $\operatorname{Gr}^\beta(k,\infty)$, $\operatorname{Gr}^\beta(\infty,\infty)$, $\operatorname{Gr}^\beta(\infty,k)$, $\operatorname{Gr}_0^\beta(\infty,k)$, $\operatorname{Gr}_1^\beta(\infty,k)$, *которые попарно неизоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть X — линейный инд-грассманиан, являющийся индуктивным пределом цепи вложений

$$X_1 \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} X_2 \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\varphi_{n-1}}{\hookrightarrow} X_n \overset{\varphi_n}{\hookrightarrow} X_{n+1} \overset{\varphi_{n+1}}{\hookrightarrow} \ldots,$$

где все X_n — это (возможно, ортогональные или симплектические) грассманианы и $\lim_{n\to\infty} \dim X_n = \infty$. Тогда для бесконечно многих n многообразие X_n является либо грассманианом, либо ортогональным грассманианом, либо симплектическим грассманианом. Значит, можно считать без ограничения общности, что все X_n относятся к одному из этих трёх типов. Рассмотрим случай, когда все X_n — обычные грассманианы. (Два остальных случая рассматриваются аналогично с некоторыми особенностями в ортогональном случае.)

Есть две различные возможности: либо для бесконечного числа значений n вложение $\varphi_n\colon X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ пропускается через проективное пространство в X_{n+1}, либо нет. Во первом случае, очевидно, $X \cong \mathrm{Gr}(1) \cong \mathbb{P}^\infty$. Во втором случае, удаляя несколько первых вложений, мы можем считать, что никакое из вложений φ_n не пропускается через проективное пространство в X_{n+1}. Тогда, по теореме 3.5, все φ_m являются стандартными расширениями, а значит, X изоморфен $\mathrm{Gr}(k)$ или $\mathrm{Gr}(\infty)$.

Доказательство того, что стандартные инд-грассманианы попарно неизоморфны, см. в [PT1, Lemmas 5.1, 5.2, 5.4]. □

Изотропные инд-грассманианы, которые не рассматриваются в теореме 3.8, имеют вид $\mathrm{Gr}^\beta(F,E)$, где β — симметрическая форма, а F — максимальное изотропное подпространство, для которого $F = F^\perp$, или же F — изотропное подпространство коразмерности 2 или 4 в $F^\perp$. Инд-грассманиан $\mathrm{Gr}^\beta(F,E)$ с $\mathrm{codim}_{F^\perp} F = 4$ является линейным инд-грассманианом в смысле определения 3.2. В [PT1, Theorem2] не доказано, чо любой инд-грассманиан $X = \varinjlim X_n$, у которого X_n изоморфно грассманиану $\mathrm{Gr}^\beta(l_n - 2, V_n)$ с $m_n = \dim V_n = 2l_n$, будет изоморфен $\mathrm{Gr}^\beta(F,E)$ с $\mathrm{codim}_{F^\perp} F = 4$. Мы, тем не менее, полагаем, что это будет верным. Случаи $F = F^\perp$ и $\mathrm{codim}_{F^\perp} F = 2$ не подходят под определение 3.2, поскольку не выполняется требование $\mathrm{Pic}\, X_n \cong \mathbb{Z}$. Эти случаи требуют специального рассмотрения.

В завершение этого параграфа отметим, что идея чисто геометрической характеризации инд-грассманианов $\mathrm{Gr}(F,E)$ (или их изотропных аналогов), без ссылок на действие инд-группы $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$ на $\mathrm{Gr}(F,E)$, должна переноситься на случай произвольных инд-многообразий обобщённых флагов. Для этого требуется определить строго линейное вложение произвольных обычных флаговых многообразий $X \hookrightarrow Y$ в чисто геометрических терминах (то есть усилить определение 3.1), а затем доказать, что строго линейные вложения — это в точности стандартные расширения (определение стандартного расширения допускает очевидное обобщение на случай произвольных многообразий флагов). Из этого будет следовать, что любое линейное флаговое инд-многообразие — это инд-многообразие обобщённых флагов.

4. Инд-многообразия обобщённых флагов как однородные инд-пространства

В этой главе мы доказываем, что каждое инд-многообразие обобщённых флагов (возможно, изотропных) является однородным пространством одной из классических инд-групп $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$ и $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$, определённых в главе 2. Наше изложение следует статьям [DP1], [DP2], [DC], [DCPS], [NP] и [DCP].

4.1. Классические инд-группы и их подгруппы Картана. Напомним, что классические инд-группы $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(V,E)$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C}) = \mathrm{SO}(V,E,\beta)$ и $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C}) = \mathrm{Sp}(V,E,\beta)$ были определены в примере 2.4. Пусть G — одна из этих групп. Отметим, что в каждом случае у нас есть исчерпание группы G её конечномерными подгруппами соответствующего типа, описанное в примере 2.4. Мы будем обозначать это исчерпание через $G = \bigcup G_n$. К примеру, если $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, то $G_n = \mathrm{SL}(V_n) \cong \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, и так далее. Цель этого параграфа — описать структуру картановских подгрупп группы G более детально.

Иногда более удобно работать с алгебрами Ли вместо групп. Пусть $\mathfrak{g}_n \subset \mathfrak{gl}(V_n)$ — алгебра Ли группы G_n. По каждому линейному оператору φ на V_n можно построить линейный оператор φ' на V_{n+1}, полагая

$$\varphi'(x) = x \text{ для } x \in V_n \text{ и } \varphi'(e) = 0 \text{ при } e \in E \setminus E_n$$

(ср. с определением оператора $\widehat{\varphi}$ из примера 2.4). Это задаёт вложение

$$\mathfrak{g}_n \hookrightarrow \mathfrak{g}_{n+1},\ \varphi \mapsto \varphi',$$

для каждого $n \geqslant 1$. Мы обозначаем индуктивный предел $\varinjlim \mathfrak{g}_n$ через $\mathfrak{g}$ и называем его *алгеброй Ли* группы G. Если $G = \mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$ и $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$, то мы пишем $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{C})$,

$\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{C})$ и $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{C})$ соответственно. Если $H = \bigcup H_n$ — инд-подгруппа в G, где $H_n = H \cap G_n$, а $\mathfrak{h}_n$ — алгебра Ли группы H_n, то отображение $\varphi \mapsto \varphi'$ определяет вложение

$$\mathfrak{h}_n \hookrightarrow \mathfrak{h}_{n+1},\ \varphi \mapsto \varphi',$$

и мы называем индуктивный предел $\mathfrak{h} = \varinjlim \mathfrak{h}_n$ *алгеброй Ли* подгруппы H.

В конечномерной ситуации существует несколько эквивалентных определений подалгебры Картана полупростой алгебры Ли. Например, можно сказать, что это максимальная торическая подалгебра, или же нильпотентная самонормализуемая подалгебра. Кроме того, все картановские подалгебры любой конечномерной алгебры Ли сопряжены. Для $\mathfrak{g}$ ситуация несколько более деликатна. Один из новых эффектов заключается в том, что существуют максимальные торические подалгебры в $\mathfrak{g}$, которые не задают корневого разложения алгебры $\mathfrak{g}$. Другой эффект состоит в том, что существуют несопряжённые максимальные торические подалгебры и, следовательно, различные корневые системы одной и той же алгебры Ли.

Как известно, для конечномерной полупростой алгебры Ли есть понятие разложения Жордана и, в частности, понятия полупростых и нильпотентных элементов. Поскольку вложения $\mathfrak{g}_n \hookrightarrow \mathfrak{g}_{n+1}$ сохраняют их определения, мы можем говорить о разложении Жордана элемента алгебры $\mathfrak{g}$. Подалгебра $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{g}$ называется *торической*, если каждый элемент алгебры $\mathfrak{t}$ полупрост. Каждая торическая подалгебра является абелевой. Будем через $\mathfrak{h}_{ss}$ обозначать множество полупростых компонент элементов данной подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. К примеру, если $\mathfrak{t}$ — торическая подалгебра, то $\mathfrak{t}_{ss} = \mathfrak{t}$. Подалгебра $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ называется *локально нильпотентной*, если она локально нильпотентна как $\mathfrak{h}$-модуль, то есть если для любых $x,\ y \in \mathfrak{h}$ найдётся такое $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, что $\mathrm{ad}_x^m(y) = 0$. Это эквивалентно тому, что $\mathfrak{h}$ является объединением вложенных конечномерных нильпотентных алгебр Ли. Торическая подалгебра $\mathfrak{t}$ называется *расщепляющей*, если $\mathfrak{g}$ является весовым $\mathfrak{t}$-модулем, то есть если $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}^\lambda$, где

$$\mathfrak{g}^\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_y(x) = \lambda(y)x \text{ для всех } y \in \mathfrak{h}\}.$$

Пример 4.1. i) Напомним, что в главе 2 было дано определение пространства V_*. Алгебра Ли $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{gl}(V, V_*) = V \otimes V_*$ с коммутатором, индуцированным произведением

$$(v_1 \otimes \alpha_1)(v_2 \otimes \alpha_2) = \alpha_2(v_1)v_2 \otimes \alpha_1.$$

Изоморфизм $\eta\colon \mathfrak{gl}(V, V_*) \to \mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}(V)$ задаётся обычной формулой

$$\eta(v \otimes \alpha)(w) = \alpha(w)v,\ v,\ w \in V,\ \alpha \in V_*.$$

Тогда $\mathfrak{t} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathbb{C}e_n \otimes \mathbb{C}e_n^*$ — расщепляющая максимальная торическая подалгебра в $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$. На самом деле, $\mathfrak{t}$ состоит из всех линейных операторов из $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$, диагональных в базисе E.

ii) Положим

$$\mathfrak{t} = \bigoplus_{n \geqslant 3} \mathbb{C}(e_n - e_1) \otimes \mathbb{C}(e_n^* - e_2^*),$$

тогда $\mathfrak{t}$ — это максимальная торическая подалгебра в $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$, причём она будет нерасщепляющей.

Если $A \subset \mathfrak{g}$ — любое подмножество, а $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — любая подалгебра, то *централизатором* подмножества A в $\mathfrak{h}$ называется подпространство

$$\mathfrak{z}_\mathfrak{h}(A) = \{x \in \mathfrak{h} \mid [x, y] = 0 \text{ для всех } y \in A\} \subset \mathfrak{h}.$$

Определение 4.2. Подалгебра $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}$ называется *подалгеброй Картана*, если она локально нильпотентна и $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}_{ss})$. Инд-подгруппа H в G называется *подгруппой Картана*, если алгебра Ли группы H является подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$.

Лемма 4.3. *Пусть $\mathfrak{h}$ — локально нильпотентная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Тогда верны следующие утверждения*:

i) $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}_{ss})$;

ii) $\mathfrak{h}_{ss}$ *— торическая подалгебра в* $\mathfrak{g}$;

iii) $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}_{ss})$ *— самонормализуемая подалгебра в* $\mathfrak{g}$.

Доказательство. i) Выберем два произвольных элемента $x,\ y \in \mathfrak{h}$. Поскольку $\mathfrak{h}$ локально нильпотентна, $\mathrm{ad}_x^m(y) = 0$ для некоторого m. Будем через обозначать через z_{ss} полупростую часть произвольного элемента $z \in \mathfrak{g}$. Хорошо известно, что $\mathrm{ad}_{x_{ss}}$ — многочлен от ad_x без свободного члена, поэтому

$$\mathrm{ad}_{x_{ss}}(\mathrm{ad}_x^{m-1}(y)) = 0.$$

Каждый элемент коммутирует со своей полупростой частью, так что

$$\mathrm{ad}_x^{m-1}(\mathrm{ad}_{x_{ss}}(y)) = 0,$$

и по индукции получаем, что $\mathrm{ad}_{x_{ss}}^m(y) = 0$. Таким образом, $\mathrm{ad}_{x_{ss}}(y) = 0$ и, следовательно, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{ss})$.

ii) Аналогично, из $\mathrm{ad}_y(x_{ss}) = 0$ следует, что $\mathrm{ad}_{y_{ss}}(x_{ss}) = 0$. Значит, любые два элемента $\mathfrak{h}_{ss}$ коммутируют. Поскольку сумма любых двух коммутирующих полупростых элементов полупроста, $\mathfrak{h}_{ss}$ является подалгеброй.

iii) Предположим, что $z \in \mathfrak{g}$ принадлежит нормализатору $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{ss})$, тогда $[x, y] \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{ss})$ для любого $y \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{ss})$, в частности, для любого $y \in \mathfrak{h}_{ss}$. Значит, если $y \in \mathfrak{h}_{ss}$, то $[[x, y], y] = 0$, а раз y полупрост, то $[x, y] = 0$. Итак, $x \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{ss})$, а потому $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{ss})$ самонормализуема. □

Следующая теорема — это основной общий результат статьи [DCPS], характеризующий подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}$ (в [DCPS] она доказана в более общем контексте локально редуктивных алгебр Ли).

Теорема 4.4. *Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$. Следующие условия на $\mathfrak{h}$ эквивалентны:*

i) $\mathfrak{h}$ *— подалегбра Картана;*

ii) $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{ss})$ *и* $\mathfrak{h}_{ss}$ *является подалгеброй;*

iii) $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ *для какой-то максимальной торической подалгебры* $\mathfrak{t}$ *в* $\mathfrak{g}$, *причём* $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}_{ss}$.

Кроме того, если $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана, то $\mathfrak{h}$ самонормализуема, причём и полупростая, и нильпотентная части в разложении Жордана любого элемента из $\mathfrak{h}$ лежат в $\mathfrak{h}$.

Существует единообразное описание картановских подалгебр в $\mathfrak{g}$ в терминах так называемых самодвойственных систем, детали см. в [DCPS, Corollary 4.11]. Все подалгебры Картана в алгебрах Ли $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{C}_\infty)$ и $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{C})$ абелевы, в то время как в $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{C})$ есть и неабелевы картановские подалгебры, пример см. в [DCPS, Subsection 4.2].

Подалгебра Картана $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *расщепляющей*, если $\mathfrak{h}_{ss}$ — расщепляющая торическая подалгебра в $\mathfrak{g}$. В этом случае $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{ss}$. Подгруппа Картана H в G называется *расщепляющей*, если её алгебра Ли — расщепляющая подалгебра Картана. Вообще говоря, подгруппа Картана (соответственно, подалгебра Картана) в G (соответственно, в $\mathfrak{g}$) является расщепляющей тогда и только тогда, когда она является индуктивным пределом подгрупп Картана в G_n' (соответственно, подалгебр Картана в $\mathfrak{g}_n'$), где $G = \bigcup G_n'$ — какое-то исчерпание группы G её конечномерными классическими подгруппами нужного типа, а $\mathfrak{g} = \bigcup \mathfrak{g}_n'$ — соответствующее исчерпание алгебры $\mathfrak{g}$ её конечномерными классическими подалгебрами.

Пример 4.5. (расщепляющие максимальные торические подалгебры) i) Пусть $G = \mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$ или $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$ (соответственно, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{C})$). Множество H (соответственно, $\mathfrak{h}$) всех линейных операторов из G (соответственно, из $\mathfrak{g}$), диагональных в базисе E, образует расщепляющую картановскую подгруппу (соответственно, расщепляющую картановскую подалгебру), причём $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}\, H$.

ii) Положим $m_n = \dim V_n$ при $n \geqslant 1$. Если β кососимметрична, то будем предполагать, что каждое $m_n = 2l_n$ чётно (и тогда $\mathfrak{g}_n \cong \mathfrak{sp}_{2l_n}(\mathbb{C})$). Если β симметрична, то предположим, что либо каждое $m_n = 2l_n$ чётно (и тогда $\mathfrak{g}_n \cong \mathfrak{so}_{2l_n}(\mathbb{C})$), либо каждое $m_n = 2l_n + 1$ нечётно (и тогда $\mathfrak{g}_n \cong \mathfrak{so}_{2l_n+1}(\mathbb{C})$). Если каждое m_n чётно, перенумеруем базис E, полагая

$$E = \{e_i,\ e_{-i}\}_{i\in\mathbb{Z}_{>0}},\ E_n = \{e_i,\ e_{-i}\}_{i=1}^{l_n},$$

а если каждое m_n нечётно, то перенумеруем E, полагая

$$E = \{e_0\} \cup \{e_i,\ e_{-i}\}_{i\in\mathbb{Z}_{>0}},\ E_n = \{e_0\} \cup \{e_i,\ e_{-i}\}_{i=1}^{l_n}.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\beta(u,v) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{l_n}(u_iv_{-i} + u_{-i}v_i) & \text{для } \mathfrak{so}_{2l_n}(\mathbb{C}), \\ u_0v_0 + \sum_{i=1}^{l_n}(u_iv_{-i} + u_{-i}v_i) & \text{для } \mathfrak{so}_{2l_n+1}(\mathbb{C}), \\ \sum_{i=1}^{l_n}(u_iv_{-i} - u_{-i}v_i) & \text{для } \mathfrak{sp}_{2l_n}(\mathbb{C}). \end{cases}$$

Здесь u, $v \in V_n$ и x_i обозначает координату вектора x, соответствующую вектору e_i. Тогда множество H (соответственно, $\mathfrak{h}$) всех линейных операторов из G (соответственно, из $\mathfrak{g}$), диагональных в базисе E, образует расщепляющую картановскую подгруппу (соответственно, расщепляющую картановскую подалгебру), причём $\mathfrak{h} = \operatorname{Lie} H$.

Основной результат о расщепляющих картановских подалгебрах звучит так.

Предложение 4.6. [DCPS] i) *Если $\mathfrak{t}$ — максимальная расщепляющая торическая подалгебра в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ — расщепляющая картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$.* ii) *Если $\mathfrak{h}$ — расщепляющая картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{ss}$.* iii) *Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{C})$, то все картановские подалгебры сопряжены с помощью группы* $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$. *Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_\infty(\mathbb{C})$, то существует ровно два класса* $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$*-сопряжённости расщепляющих картановских подалгебр, отвечающих исчерпаниям $\mathfrak{g} = \varinjlim \mathfrak{so}_{2l_n}(\mathbb{C})$ и $\mathfrak{g} = \varinjlim \mathfrak{so}_{2l_n+1}(\mathbb{C})$, описанным выше.*

Отметим также, что $G \subsetneq \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$. В самом деле, $G = \mathrm{SL}(V,E)$ состоит из автоморфизмов пространства V с определителем 1, которые переводят в себя все элементы базиса E, кроме конечного числа, в то время как $\operatorname{Aut}\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{C})$ в этом случае содержит группу всех автоморфизмом пространства V, которые индуцируют автоморфизм пространства V_*.

4.2. Расщепляющие борелевские и параболические подгруппы классических инд-групп. В этом параграфе мы обсуждаем борелевские и параболические подгруппы и подалгебры классических инд-групп и их алгебр Ли соответственно. В частности, мы классифицируем все расщепляющие борелевские подгруппы в терминах их корней.

В конечномерном случае борелевской подалгеброй полупростой алгебры Ли называется максимальная разрешимая подалгебра, а параболической подалгеброй — подалгебра, содержащая какую-то борелевскую подалгебру. Будем говорить, что подалгебра $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{g}$ *локально разрешима*, если каждое конечное подмножество $\mathfrak{b}$ содержится в конечномерной разрешимой подалгебре, то есть если $\mathfrak{b}$ есть объединение конечномерных разрешимых подалгебр.

Определение 4.7. *Борелевская подалгебра* $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{g}$ — это максимальная локально разрешимая подалгебра $\mathfrak{g}$. Борелевская подалгебра $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{g}$ называется *расщепляющей*, если она содержит расщепляющую картановскую подалгебру алгебры $\mathfrak{g}$. *Борелевская подгруппа* в G — это инд-подгруппа B, алгебра Ли $\mathfrak{b} = \operatorname{Lie} B$ которой является борелевской подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Борелевская подгруппа B называется *расщепляющей*, если её алгебра Ли является расщепляющей борелевской подалгеброй, или, эквивалентно, если B содержит расщепляющую картановскую подгруппу группы G.

Вообще говоря, свойства борелевских подалгебр могут быть очень необычными с конечномерной точки зрения. К примеру, существует борелевская подалгебра в $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$ (см. пример 4.13 ниже), не содержащая ни одного ненулевого полупростого элемента и, следовательно, ни одной нетривиальной торической подалгебры!

Напротив, расщепляющие борелевские подалгебры допускают очень хорошее описание, приведённое ниже. Заметим, что борелевская подалгебра в $\mathfrak{g}$ (соответственно, борелевская подгруппа в G) является расщепляющей в том и только в том случае, если она является индуктивным пределом борелевских подгрупп в G'_n (соответственно, борелевских подалгебр в $\mathfrak{g}'_n$), где $G = \bigcup G'_n$ — какое-то исчерпание инд-группы G её конечномерными классическими подгруппами нужного типа, а $\mathfrak{g} = \bigcup \mathfrak{g}'_n$ — соответствующее исчерпание алгебры $\mathfrak{g}$ её конечномерными классическими подалгебрами.

Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, описанная в примерах 4.5 i) и ii). Любая расщепляющая борелевская подалгебра сопряжена относительно $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ расщепляющей борелевской подалгебре, содержащей $\mathfrak{h}$. Таким образом, в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только тех борелевских подалгебр $\mathfrak{b}$, которые содержат $\mathfrak{h}$. Имеется корневое разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}^{\alpha},$$

где Φ — *система корней* алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$, а $\mathfrak{g}^{\alpha}$ — *корневые подпространства.* Систем корней Φ — это просто объединение систем корней подалгебр $\mathfrak{g}_n$, и она совпадает с одной из следующих бесконечных систем корней:

$$\begin{aligned}
A_\infty &= \pm\{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ i<j\},\\
B_\infty &= \pm\{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ i<j\}\\
&\quad \cup \pm\{\varepsilon_i + \varepsilon_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ i<j\} \cup \pm\{\varepsilon_i,\ i \in \mathbb{Z}_{>0}\},\\
C_\infty &= \pm\{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ i<j\}\\
&\quad \cup \pm\{\varepsilon_i + \varepsilon_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ i<j\} \cup \pm\{2\varepsilon_i,\ i \in \mathbb{Z}_{>0}\},\\
D_\infty &= \pm\{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ i<j\}\\
&\quad \cup \pm\{\varepsilon_i + \varepsilon_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ i<j\}.
\end{aligned}$$

Линейные функции $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $\varepsilon_i + \varepsilon_j$, ε_i, $2\varepsilon_i$ на $\mathfrak{h}$ определяются так: если $h \in \mathfrak{h}$, то

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h) &= \begin{cases} h_{i,i} - h_{j,j} & \text{в случае } A_\infty,\\ h_{i,i} - h_{-i,-i} - h_{j,j} + h_{-j,-j} & \text{иначе,}\end{cases}\\
(\varepsilon_i + \varepsilon_j)(h) &= h_{i,i} - h_{-i,-i} + h_{j,j} - h_{-j,-j},\\
\varepsilon_i(h) &= 2(h_{i,i} - h_{-i,-i}),\\
2\varepsilon_i(h) &= h_{i,i} - h_{-i,-i}.
\end{aligned}$$

Здесь в ортогональном и симплектическом случаях мы нумеруем базисные векторы из E так, как в примере 4.5, и через $x_{i,j}$ обозначаем (i,j)-й элемент матрицы x.

Напомним [DP3], что линейный порядок на $\{0\} \cup \{\pm\varepsilon_i\}$ называется $\mathbb{Z}_2$-*линейным*, если умножение на -1 обращает порядок. Согласно [DP3, Proposition 3], существует биекция между расщепляющими борелевскими подалгебрами в $\mathfrak{g}$, содержащими $\mathfrak{h}$, и следующими линейно упорядоченными множествами:

для A_∞: линейные порядки на $\{\varepsilon_i\}$;

для B_∞ и C_∞: $\mathbb{Z}_2$-линейные порядки на $\{0\} \cup \{\pm\varepsilon_i\}$;

для D_∞: $\mathbb{Z}_2$-линейные порядки на $\{0\} \cup \{\pm\varepsilon_i\}$ с тем свойством, что минимальный положительный элемент (если он существует) принадлежит $\{\varepsilon_i\}$.

В дальнейшем мы обозначаем такие порядки через $\prec$. Чтобы описать нужную биекцию, обозначим $\vartheta_i = \varepsilon_i$, если $\varepsilon_i \succ 0$, и $\vartheta_i = -\varepsilon_i$, если $\varepsilon_i \prec 0$ (для A_∞ при всех i положим $\vartheta_i = \varepsilon_i$). Теперь полагаем $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, где

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}^{\alpha}$$

и, по определению,

$$\begin{aligned}
A_\infty^+ &= \{\vartheta_i - \vartheta_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ \vartheta_i \succ \vartheta_j\},\\
B_\infty^+ &= \{\vartheta_i - \vartheta_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ \vartheta_i \succ \vartheta_j\}\\
&\quad \cup \{\vartheta_i + \vartheta_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ \vartheta_i \succ \vartheta_j\} \cup \{\vartheta_i,\ i \in \mathbb{Z}_{>0}\},\\
C_\infty^+ &= \{\vartheta_i - \vartheta_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ \vartheta_i \succ \vartheta_j\}\\
&\quad \cup \{\vartheta_i + \vartheta_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ \vartheta_i \succ \vartheta_j\} \cup \{2\vartheta_i,\ i \in \mathbb{Z}_{>0}\},\\
D_\infty^+ &= \{\vartheta_i - \vartheta_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ \vartheta_i \succ \vartheta_j\}\\
&\quad \cup \{\vartheta_i + \vartheta_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ \vartheta_i \succ \vartheta_j\}.
\end{aligned}$$

Подалгебра $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ называется *параболической* (соответственно, *расщепляющей параболической*), если она содержит борелевскую (соответственно, расщепляющую борелевскую) подалгебру алгебры $\mathfrak{g}$. Инд-подгруппа $P \subset G$ называется *параболической* (соответственно, *расщепляющей параболической*) *подгруппой*, если она содержит борелевскую (соответственно, расщепляющую борелевскую) подгруппу группы G, или, что равносильно, если алгебра Ли $\mathfrak{p} = \operatorname{Lie} P$ является параболической (соответственно, расщепляющей параболической) подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

Обратим внимание, что параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}$ (соответственно, параболическая подгруппа в G) является расщепляющей тогда и только тогда, когда она является индуктивным пределом параболических подгрупп в G'_n (соответственно, параболических подалгебр в $\mathfrak{g}'_n$), где $G = \bigcup G'_n$ — какое-то исчерпание инд-группы G её конечномерными классическими подгруппами нужного типа, а $\mathfrak{g} = \bigcup \mathfrak{g}'_n$ — соответствующее исчерпание алгебры $\mathfrak{g}$ её конечномерными классическими подалгебрами.

4.3. Однородные инд-пространства. Здесь мы приводим основной результат этой главы, который гласит, что каждая расщепляющая параболическая подгруппа является стабилизатором обобщённого флага и, обратно, каждое инд-многообразие (изотропных) обобщённых флагов есть однородное инд-пространство группы G.

Пусть H и $\mathfrak{h}$ таковы, как в примере 4.5. В изотропном случае мы будем использовать обозначения из примера 4.5 ii). Заметим, что в этом случае E является β-изотропным базисом относительно инволюции

$$i_E\colon e_i \mapsto e_{-i},\ e_i \in E.$$

Каждая расщепляющая параболическая подалгебра $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{g}$ сопряжена относительно $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ какой-то расщепляющей параболической подалгебре в $\mathfrak{g}$, содержащей $\mathfrak{h}$, поэтому мы можем считать без ограничения общности, что $\mathfrak{p}$ содержит подалгебру $\mathfrak{h}$ (и, следовательно, что соответствующая параболическая подгруппа P в G содержит подгруппу H).

Пусть $\mathcal{F}$ — обобщённый флаг в V, совместимый с базисом E (и β-изотропный, если E является β-изотропным). Инд-группа G естественно действует на инд-многообразии $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ (и на $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$ в изотропном случае). Обозначим через $P_{\mathcal{F}}$ стабилизатор $\mathcal{F}$ в G.

Теорема 4.8. i) *Подгруппа $P_{\mathcal{F}}$ является расщепляющей параболической подгруппой в G, содержащей H.* ii) *Отображение $\mathcal{F} \mapsto P_{\mathcal{F}}$ является биекцией между множеством обобщённых флагов в V, совместимых с базисом E, и множеством расщепляющих параболических подгрупп в G, содержащих H.*

Доказательство. i) Включение $H \subset P_{\mathcal{F}}$ сразу следует из определения H и совместимости $\mathcal{F}$ и E. Поскольку каждая $P_n = P \cap G_n$ является стабилизатором флага $\mathcal{F} \cap V_n$, P_n — параболическая подгруппа в G_n. Следовательно, $P = \varinjlim P_n$ — расщепляющая параболическая подгруппа инд-группы G.

ii) Обратно, пусть $P = \varinjlim P_n$ — параболическая подгруппа в G, содержащая H, где P_n — параболическая подгруппа в G_n для всех $n \geqslant 1$. Обозначим через $\mathcal{F}(n)$ флаг в V_n, стабилизатор которого совпадает с P_n. Тогда $\iota_n(\mathcal{F}(n)) = \mathcal{F}(n+1)$ (и $\iota_n^\beta(\mathcal{F}(n)) = \mathcal{F}(n+1)$ в изотропном случае). Индуктивный предел $\varinjlim \mathcal{F}(n)$ определяет обобщённый флаг $\mathcal{F}$ в V, и прямая проверка показывает, что $P = P_{\mathcal{F}}$. □

Отметим, что максимальные обобщённые флаги в V, совместимые с E, соответствуют при этой биекции расщепляющим борелевским подгруппам в G, содержащим H.

Поскольку $G/P_{\mathcal{F}} = \bigcup G_n/P_n$, где $P_n = P_{\mathcal{F}} \cap G_n$, мы заключаем, что $G/P_{\mathcal{F}}$ — это локально проективное инд-многообразие, как мы уже отмечали в главе 2. Теперь мы в состоянии определить на $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ и $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$ соответствующие структуры однородных инд-пространств.

Теорема 4.9. *Существует изоморфизм инд-многообразий $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E) \cong G/P_{\mathcal{F}}$ (и инд-многообразий $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E) \cong G/P_{\mathcal{F}}$ в изотропном случае).*

Доказательство. Пусть $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ или $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$, обозначим тогда через U конечномерное подпространство в V, существование которого гарантируется E-соизмеримостью обобщённых флагов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Мы можем предполагать без ограничения общности, что $U = V_n$ для некоторого $n \geqslant 1$. Тогда $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \cap V_n$ и $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G} \cap V_n$ — флаги одинакового типа в конечномерном векторном пространстве V_n, а значит, найдётся такой $g_n \in G_n$, что $g_n(\mathcal{F}(n)) = \mathcal{G}(n)$. Мы можем продолжить g_n до элемента $g_{n+1} = \widehat{g}_n$, полагая $\widehat{g}_n(e) = e$ при $e \in E \setminus E_n$, и так далее. Обозначим через g соответствующий элемент группы G. Тогда отображение

$$\eta\colon \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E) \to G/P_{\mathcal{F}} \text{ (или } \eta\colon \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E) \to G/P_{\mathcal{F}}),\ \mathcal{G} \mapsto gP,$$

корректно определено. Легко проверяется, что η — изоморфизм инд-многообразий. □

4.4. Борелевские и параболические подалгебры: общий случай. В этом параграфе мы кратко обсуждаем описание (возможно нерасщепляющих) борелевских и параболических подалгебр в $\mathfrak{g}$ (или, что равносильно, борелевских и параболических подгрупп в G) в терминах так называемых замкнутых обобщённых флагов и тугих пар полузамкнутых обобщённых флагов. Этот материал взят из работ [DC] и [DCP].

Если параболическая подгруппа группы G (или, эквивалентно, параболическая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$) является нерасщепляющей, то она не может быть стабилизатором обобщённого флага, совместимого с базисом E или с любым другим G-предпочтительным базисом E' пространства V. Значит, чтобы связать общие нерасщепляющие параболические подгруппы и подалгебры с обобщёнными флагами, мы должны рассматривать обобщённые флаги, которые не совместимы ни с каким G-предпочтительным базисом.

Напомним, что в примере 4.1 мы отождествили

$$\mathfrak{gl}(V, V_*) \cong \mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}(V).$$

При этом изоморфизме $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{C})$ отождествляется с коммутантом $\mathfrak{sl}(V, V_*)$ алгебры $\mathfrak{gl}(V, V_*)$. Заметим, что если U — счётномерное комплексное векторное пространство, а $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times U \to \mathbb{C}$ — невырожденное спаривание, то мы можем определить алгебру Ли $\mathfrak{gl}(V, U) \cong \mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$ как векторное пространство $V \otimes U$ со скобкой, индуцированной произведением

$$(v_1 \otimes u_1)(v_2 \otimes u_2) = \langle v_1, u_2\rangle v_2 \otimes u_1.$$

Тогда $\mathfrak{gl}(V, V_*)$ является конкретной реализацией этой конструкции, где невырожденное спаривание $V \times V_* \to \mathbb{C}$ задаётся правилом $\langle v, \alpha\rangle = \alpha(v)$.

Далее, если β — симметрическая (соответственно, кососимметрическая) невырожденная билинейная форма на V, то β определяет невырожденное спаривание $V \times V \to \mathbb{C}$, и мы можем отождествить $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{C})$ (соответственно, $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{C})$) с подалгеброй Ли $\mathfrak{so}(V, V) = \bigwedge^2 V$ (соответственно, с подалгеброй Ли $\mathfrak{sp}(V, V) = \mathrm{Sym}^2 V$) алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V, V)$.

Выбрав невырожденное спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times U \to \mathbb{C}$ и подпространство F в V или в U, мы можем определить $F^\perp$ как $\langle\cdot,\cdot\rangle$-ортогональное дополнение к F в U или V. (Если спаривание задаётся невырожденной симметрической или кососимметрической билинейной формой β, это определение совпадает с определением $F^\perp$, данным в главе 2.) С каждой цепью $\mathcal{C}$ подпространств в V можно связать цепь $\mathcal{C}^\perp = \{F^\perp,\ F \in \mathcal{C}\}$ подпространств U, и наоборот.

Подпространство $F \subset V$ называется *замкнутым* (в топологии Макки на V), если $F = \overline{F}$, где $\overline{F} = F^{\perp\perp}$ — *замыкание* пространства F. Обобщённый флаг $\mathcal{F} = \{F'_\alpha,\ F''_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ в V называется *полузамкнутым*, если

$$\overline{F'_\alpha} \in \{F'_\alpha,\ F''_\alpha\}$$

для любого $\alpha \in \mathcal{A}$. Полузамкнутый обобщённый флаг $\mathcal{F}$ называется *замкнутым*, если, кроме того, $\overline{F''_\alpha} = F''_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$. Отметим, что если обобщённый флаг $\mathcal{F}$ в V слабо совместим с базисом E, определяющим V_*, то $\mathcal{F}$ автоматически замкнут.

Заметим, что каждое из пространств V и U является $\mathfrak{gl}(V,U)$-модулем. Значит, $\mathfrak{gl}(V,U)$ естественно действует на V и U, и стабилизатор $\operatorname{Stab}\mathcal{F}$ обобщённого флага $\mathcal{F}$ в V относительно $\mathfrak{gl}(V,U)$ задаётся формулой

$$\operatorname{Stab}\mathcal{F} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} F''_\alpha \otimes (F'_\alpha)^\perp.$$

Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V,V)$ или $\mathfrak{sp}(V,V)$, то мы пишем $\mathrm{St}^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{F}} = \operatorname{Stab}\mathcal{F} \cap \mathfrak{g}$.

Следующий результат описывает борелевские подалгебры классических бесконечномерных простых алгебр Ли (или, что равносильно, борелевские подгруппы классических инд-групп), см. [DC, Theorems 4.3, 4.10, 4.16].

Теорема 4.10. i) *Пусть* $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V,V_*)$ (*соответственно*, $\mathfrak{sp}(V,V)$ *или* $\mathfrak{so}(V,V)$). *Подалгебра* $\mathfrak{b}$ *в* $\mathfrak{g}$ *будет борелевской тогда и только тогда, когда она является стабилизатором некоторого максимального замкнутого* (*соответственно, максимального замкнутого изотропного*) *обобщённого флага в* V. ii) *При* $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V,V_*)$ (*соответственно*, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V,V)$) *отображение* $\mathcal{F} \mapsto \operatorname{Stab}\mathcal{F}$ (*соответственно*, $\mathcal{F}\ell \mapsto \mathrm{St}^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{F}}$) *из множества максимальных замкнутых* (*соответственно, из множества максимальных замкнутых изотропных*) *обобщённых флагов в пространстве* V *в множество борелевских подалгебр алгебры* $\mathfrak{g}$ *биективно. При* $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V,V)$ *слой отображения* $\mathcal{F} \mapsto \mathrm{St}^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{F}}$ *из множества максимальных замкнутых изотропных обобщённых флагов в пространстве* V *в множество борелевских подалгебр алгебры* $\mathfrak{g}$ *состоит не более, чем из двух элементов.*

(Явное описание слоёв последнего отображения дано в [DC, Subsection 4.2].)

Определение 4.11. Будем говорить, что два полузамкнутых обобщённых флага $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в пространствах V и U соответственно образуют *тугую пару*, если цепь $\mathcal{F}^\perp$ (соответственно, $\mathcal{G}^\perp$) инвариантна относительно $\operatorname{Stab}\mathcal{G}$ (соответственно, относительно $\operatorname{Stab}\mathcal{F}$). Если на V задана невырожденная симметрическая или кососимметрическая форма β, то полузамкнутый обобщённый флаг $\mathcal{F}$ называется *тугим*, если $\mathcal{F}^\perp$ инвариантна относительно стабилизатора $\mathcal{F}$ в $\mathfrak{gl}(V,V)$ (то есть если обобщённый флаг $\mathcal{F}$ образует тугую пару сам с собой).

Каждой тугой паре $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ соответствует подалгебра $\mathrm{St}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = \operatorname{Stab}\mathcal{F} \cap \operatorname{Stab}\mathcal{G}$, а также некоторая подалгебра $(\mathrm{St}_{\mathcal{F},\mathcal{G}})_-$, определённая в [DCP, p. 23]. Если $\mathcal{F}$ — тугой обобщённый флаг в V, а $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V,V)$ или $\mathfrak{sp}(V,V)$, то мы пишем $(\mathrm{St}^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{F}})_- = (\mathrm{St}_{\mathcal{F},\mathcal{F}})_- \cap \mathfrak{g}$. Следующий результат описывает параболические подалгебры классических бесконечномерных простых алгебр Ли (или, что равносильно, параболические подгруппы классических инд-групп), см. [DCP, Theorems 5.6, 6.6].

Теорема 4.12. i) *Пусть* $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V,V_*)$ *или* $\mathfrak{sl}(V,V_*)$, *а* $\mathfrak{p}$ — *подпространство в* $\mathfrak{g}$. *Тогда* $\mathfrak{p}$ *является параболической подалгеброй в* $\mathfrak{g}$ *тогда и только тогда, когда существует* (*единственная*) *тугая пара* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ *такая, что* $(\mathrm{St}_{\mathcal{F},\mathcal{G}})_- \subset \mathfrak{p} \subset \mathrm{St}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$. ii) *Пусть* $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V,V)$ *или* $\mathfrak{sp}(V,V)$, *а* $\mathfrak{p}$ — *подпространство в* $\mathfrak{g}$. *Тогда* $\mathfrak{p}$ *является параболической подалгеброй в* $\mathfrak{g}$ *тогда и только тогда, когда существует* (*единственный*) *тугой флаг* $\mathcal{F}$ *в* V *такой, что* $(\mathrm{St}^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{F}})_- \subset \mathfrak{p} \subset \mathrm{St}^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{F}}$.

Пример 4.13. Пусть $V = \langle e_\alpha,\ \alpha \in \mathbb{Q}\rangle_{\mathbb{C}}$, $U = \langle f_\beta,\ \beta \in \mathbb{Q}\rangle_{\mathbb{C}}$ и

$$\langle e_\alpha, f_\beta\rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha > \beta, \\ 0, & \text{если } \alpha \leqslant \beta. \end{cases}$$

Тогда $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — невырожденное спаривание, поэтому $\mathfrak{gl}(V,U) \cong \mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$. Для любого $\alpha \in \mathbb{Q}$ положим $F'_\alpha = \langle e_\gamma,\ \gamma < \alpha\rangle_{\mathbb{C}}$ и $F''_\alpha = \langle e_\gamma,\ \gamma \leqslant \alpha\rangle_{\mathbb{C}}$. Тогда $\mathcal{F} = \{F'_\alpha,\ F''_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Q}}$ — максимальный замкнутый обобщённый флаг в V. Его стабилизатор $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{gl}(V,U)$ является борелевской подалгеброй алгебры $\mathfrak{gl}(V,U)$, в которой нет ни одного полупростого элемента и, следовательно, ни одной торической подалгебры.

Отметим, что если P — нерасщепляющая параболическая подгруппа группы G, то на G/P также можно ввести структуру инд-многообразия. Эти инд-многообразия до сих пор не изучались. Основное отличие от расщепляющего случая заключается в том, что $P\cap G_n$ не обязательно будет параболической подгруппой группы G_n, поэтому у нас нет исчерпания G/P компактными многообразиями. Роль произвольных нерасщепляющих борелевских подгрупп и подалгебр в теории представлений также остаётся неясной.

5. Разложение Шуберта

В конечномерном случае разложение Шуберта играет важную роль в изучении геометрии многообразий флагов.

Напомним, что в главе 2 мы определили группы G_n. Зафиксируем максимальный тор H_n в группе G_n, борелевскую подгруппу B_n в G_n, содержащую H_n, и параболическую подгруппу P_n в G_n, содержащую B_n. Тогда G_n/P_n — соответствующее флаговое многообразие. Пусть $N_{G_n}(H_n)$ — нормализатор тора H_n в G_n. Тогда $W_n = N_{G_n}(H_n)/H_n$ — *группа Вейля* группы G_n. Поскольку H_n и B_n фиксированы, возникает множество *простых образующих* группы W_n и, следовательно, *функция длины* ℓ_n и *порядок Брюа* $\leqslant_n$ на W_n. Подробности см., к примеру, в [Bou] или [BB].

Для произвольного $w\in W_n$ обозначим через $\dot w$ любого представителя w в $N_{G_n}(H_n)$. Пусть $\mathcal{F}_n\in G_n/P_n$ — флаг в V, стабилизатор которого в G_n совпадает с P_n. Обозначим через W_{P_n} параболическую подгруппу W_n, соответствующую подгруппе P_n, а через W^{P_n} — полную систему представителей минимальной длины правых смежных классов $W_{P_n}\backslash W_n$ (W^{P_n} находится во взаимно однозначном соответствии с $W_{P_n}\backslash W_n$). Тогда W_n-действие на G_n/P_n имеет вид $w\mathcal{G}=\dot w(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}\in G_n/P_n$. В дальнейшем мы будем писать $\mathcal{F}_w = w\mathcal{F}_n$ для $w\in W_n$. Описание B_n-орбит на G_n/P_n даётся *разложением Шуберта*:

$$G_n/P_n = \bigsqcup_{w\in W^{P_n}} B_n\mathcal{F}_w.$$

Более того каждая *клетка Шуберта* $X_w^\circ = B_n\mathcal{F}_w$ изоморфна аффинному пространству $\mathbb{A}^{\ell_n(w)}$, и если σ, $\tau\in W_n$, то клетка Шуберта X_σ° содержится в *подмногообразии Шуберта* X_τ (по определению, X_τ — это замыкание X_τ° в G_n/P_n) тогда и только тогда, когда $\sigma\leqslant_n\tau$. *Разложение Брюа* группы G_n гласит, что

$$G_n = \bigsqcup_{w\in W^{P_n}} B_n\dot wP_n.$$

В этой главе мы показываем, как эти классические результаты переносятся на случай инд-многообразий обобщённых флагов. Этот материал взят из статьи [FP1].

5.1. Аналоги группы Вейля. В этом параграфе представлены некоторые комбинаторные результаты, аналогичные комбинаторике группы Вейля в обычном исчислении Шуберта. Обозначим через $W=W(E)$ группу перестановок базиса E, которые оставляют неподвижными все элементы E, кроме конечного числа. В изотропном случае мы дополнительно предполагаем, что каждая перестановка $w\in W$ коммутирует с инволюцией i_E. Обратим внимание, что $W=\varinjlim W_n$, где H — расщепляющая подгруппа Картана в G, состоящая из всех диагональных в базисе E операторов из G, $H_n = H\cap G_n$, а вложение $W_n\hookrightarrow W_n$ индуцировано вложением $H_n\hookrightarrow H_{n+1}$. Отметим также, что $W\cong N_G(H)/H$, где $N_G(H)$ — нормализатор тора H в инд-группе G.

Далее, пусть B и P — расщепляющие борелевская и параболическая подгруппы в G соответственно, содержащие H. (Мы не предполагаем, что B сопряжена какой-то подгруппе в P!) Для краткости, обозначим через $\mathcal{F}\ell$ инд-многообразие обобщённых флагов $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F},E)$ (или $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F},\beta,E)$ в изотропном случае). Как мы знаем из теоремы 4.8, существует единственный обобщённый флаг $\mathcal{G}\in\mathcal{F}\ell$ такой, что $P=P_{\mathcal{G}}=\mathrm{Stab}_G\mathcal{G}$. Можно считать без ограничения общности, что $\mathcal{G}=\mathcal{F}$, то есть что $P=P_{\mathcal{F}}$.

Напомним, что в главе 2 было определено линейно упорядоченное множество $\mathcal{A}$. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество $\mathcal{S}(E,\mathcal{A})$ (соответственно, $\mathcal{S}(E,\beta,\mathcal{A})$) всех сюръекций из E в $\mathcal{A}$ (соответственно, всех сюръекций σ из E в $\mathcal{A}$, удовлетворяющих условию $\sigma \circ i_E = i_{\mathcal{A}} \circ \sigma$). Произвольной сорьекции $\sigma \in \mathcal{S}$ соответствует обобщённый флаг

$$\mathcal{F}_\sigma = \{\mathcal{F}'_{\sigma.\alpha},\ \mathcal{F}''_{\sigma,\alpha},\ \alpha \in \mathcal{A}\},$$

где

$$\mathcal{F}'_{\sigma,\alpha} = \langle e \in E,\ \sigma(e) < \alpha\rangle_{\mathbb{C}},\ \mathcal{F}''_{\sigma,\alpha} = \langle e \in E,\ \sigma(e) \leqslant \alpha\rangle_{\mathbb{C}}.$$

При таком подходе $\{\mathcal{F}_\sigma,\ \sigma \in \mathcal{S}\}$ — это все обобщённые флаги из $\mathcal{F}\ell$, совместимые с базисом E. (Чтобы проверить это в изотропном случае, нужно применить лемму 2.9.)

Пусть σ_0 — сюръекция из $\mathcal{S}$, для которой $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\sigma_0}$. Сюръекция σ_0 определяет частичный порядок $\leqslant_P$ на базисе E по следующему правилу: $e \leqslant_P e'$, если $\sigma_0(e) \leqslant \sigma_0(e')$. Этот частичный порядок обладает тем свойством, что отношение «$e = e'$ или e не сравним с e'» — это отношение эквивалентности на E. На самом деле, выбор расщепляющей параболической подгруппы в G, содержащей тор H, — это то же самое, что выбор частичного порядка $\leqslant_P$ на E с таким свойством. Более того, P будет расщепляющей борелевской подгруппой тогда и только тогда, когда порядок $\leqslant_P$ будет линейным.

Будем говорить, что пара $(e, e') \in E \times E$ является *инверсией* для сюръекции $\sigma \in \mathcal{S}$, если $e <_B e'$ и $\sigma(e) > \sigma(e')$. (В изотропном случае предполагается дополнительно, что $e <_B i_E(e')$ и $e' \neq i_E(e')$.) Заметим, что группа W действует на $\mathcal{S}$ по правилу

$$w \cdot \sigma = \sigma \circ w^{-1},$$

причём если σ лежит на W-орбите σ_0, то условие $\sigma(e) > \sigma(e')$ эквивалентно условию $w(e) >_P w(e')$, где $\sigma = w^{-1} \cdot \sigma_0$. *Число инверсий* в $\sigma \in \mathcal{S}$ определяется как

$$n(\sigma) = n_B^P(\sigma) = \#\{(e, e') \in E \times E \mid (e, e') \text{ — инверсия для } \sigma\}.$$

Конечно, $n(\sigma)$ может быть бесконечным.

Число инверсий нельзя буквально трактовать как длину Брюа, потому что мы не предполагаем, что B сопряжена какой-то подгруппе в P. Тем не менее, положим

$$\widehat{E} = \{(e, e') \in E' \times E' \mid e \neq e'\},$$

где, по определению,

$$E' = \begin{cases} E & \text{для } \mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C}) \text{ и } \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C}), \\ \{e \in E \mid e \neq i_E(e)\} & \text{для } \mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C}) \text{ и } \mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C}). \end{cases}$$

Пусть $t_{e,e'}$ — такая перестановка базиса E, что $t_{e,e'}(e) = e'$, $t_{e,e'}(e') = e$ и $t_{e,e'}(e'') = e''$ для всех остальных $e'' \in E$. Обозначим

$$s_{e,e'} = \begin{cases} t_{e,e'} \circ t_{i_E(e), i_E(e')}, & \text{если } e' \neq i_E(e) \text{ в изотропном случае,} \\ t_{e,e'} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что $\{s_{e,e'},\ (e, e') \in \widehat{E}\}$ — это набор образующих в W.

Обозначим теперь

$$S_B = \{s_{e,e'} \mid\ e,\, e' \text{ — ближайшие элементы частично упорядоченного множества } (E', \leqslant_B)\}.$$

Вообще говоря, S_B не порождает W. Для любого $w \in W$ пусть

$$\ell(w) = \ell_B(w) = \begin{cases} \min\{l \geqslant 0 \mid w = s_1 \ldots s_l \text{ для каких-то } s_1,\ \ldots,\ s_l \in S_B\}, & \text{если } l \text{ существует,} \\ \infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обратим внимание, что W_n можно рассматривать как подгруппу в W, порождённую подмножеством

$$S_B^n = \{s_{e,e'} \mid\ e,\, e' \text{ — ближайшие элементы в } (E_n \cap E', \leqslant_B)\},$$

являющимся набором простых образующих в W_n. Пусть ℓ_n — соответствующая фнукция длины на W_n.

Предложение 5.1. *Пусть $w \in W$. Тогда*

i) $\ell(w) = \lim\limits_{n\to\infty} \ell_n(w)$;

ii) $\ell(w) = n_B^B(w^{-1} \cdot \sigma_0)$;

iii) $\ell(w) = \infty$ *тогда и только тогда, когда существует* $e \in E$ *такой, что множество* $\{e' \in E \mid e <_B e' <_B w(e)\}$ *бесконечно.*

Доказательство этого предложения см. в [FP1, Proposition 8].

Следствие 5.2. *Следующие условия эквивалентны*:

i) *множество S_B порождает группу W*;

ii) $\ell(w) < \infty$ *для всех* $w \in W$;

iii) $(E, \leqslant_B)$ *изоморфно как частично упорядоченное множество подмножеству в* $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Эквивалентность i)$\Leftrightarrow$ii) очевидна. Отметим, что условие iii) равносильно тому, что для всех $e,\ e' \in E$ интервал $\{e'' \in E \mid e \leqslant_B e'' \leqslant_B e'\}$ конечен. Значит, импликация iii)$\Rightarrow$ii) вытекает из предложения 5.1 iii). Обратно, если выполняется ii), то $\ell(s_{e,e'}) < \infty$ для всех $(e, e') \in \widehat{E}$, а потому, вновь из предложения 5.1 iii), множество $\{e'' \in E \mid e \leqslant_B e'' \leqslant_B e'\}$ конечно. Это влечёт условие iii). $\square$

Обозначим через $\dot{w}$ произвольного представителя элемента w в $N_G(H)$.

Предложение 5.3. *Пусть $w \in W$. Тогда*

i) $B \subset \dot{w}P\dot{w}^{-1}$ *тогда и только тогда, когда* $n_B^P(w \cdot \sigma_0) = 0$;

ii) *существует $w \in W$ такая, что $B \subset \dot{w}P\dot{w}^{-1}$, тогда и только тогда, когда существует $w \in W$ такая, что* $n_B^P(w^{-1} \cdot \sigma_0) < \infty$.

Доказательство. i) По определению обобщённого флага $\mathcal{F}_{\sigma_0}$, условие $B \subset P$ равносильно тому, что линейный порядок $\leqslant_B$ на E слабее частичного порядка $\leqslant_P$ на E, то есть тому, что из $e \leqslant_P e'$ вытекает $e \leqslant_B e'$ для любых $e,\ e' \in E$. Последнее условие эквивалентно тому, что отображение σ_0 является неубывающим, то есть тому, что $e \leqslant_B e'$ влечёт $\sigma_0(e) \leqslant \sigma_0(e')$ для всех $e,\ e' \in E$. Поскольку
$$\dot{w}P\dot{w}^{-1} = \mathrm{Stab}_G\mathcal{F}_{w\cdot\sigma_0},$$
утверждение i) доказано.

ii) Из утверждения i) следует, что если $B \subset \dot{w}P\dot{w}^{-1}$, то $n_B^P(w^{-1}\cdot\sigma_0) < \infty$. Обратная импликация доказана в [FP1, Proposition 9]. $\square$

5.2. Разложение Шуберта. Обозначим через W_P подгруппу в W, состоящую из тех $\sigma \in W$, для которых $w \cdot \sigma_0 = \sigma_0$. Прямая проверка показывает, что отображение $w \mapsto \mathcal{F}_{w\cdot\sigma_0}$ индуцирует биекцию между множеством левых смежных классов W/W_P и множеством совместимых с E обобщённых флагов из $\mathcal{F}\ell$.

Определим теперь частичный порядок на $\mathcal{S}$, аналогичный порядку Брюа. Выберем любые σ, $\tau \in \mathcal{S}$. Мы будем писать $\sigma \to \tau$, если существует такая пара $(e, e') \in \widehat{E}$, что $e <_B e'$, $\sigma(e) < \sigma(e')$ и $\tau = \sigma \circ s_{e,e'}$. Положим $\sigma < \tau$, если существуют $k \geqslant 1$ и элементы $\tau_1, \ldots, \tau_k \in \mathcal{S}$ такие, что
$$\sigma \to \tau_1 \to \ldots \to \tau_k = \tau.$$

Для произвольного обобщённого флага $\mathcal{G} = \{G'_\alpha,\ G''_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{F}\ell$ определим отображение $\sigma_{\mathcal{G}} \colon E \to \mathcal{A}$, измеряющее положение $\mathcal{G}$ относительно максимального обобщённого флага $\mathcal{F}_0$, где $B = \mathrm{Stab}_G\mathcal{F}_0$. А именно, для $e \in E$ положим
$$\sigma_{\mathcal{G}}(e) = \min\{\alpha \in \mathcal{A} \mid G''_\alpha \cap F''_{0,e} \neq G''_\alpha \cap F'_{0,e}\}.$$
Здесь $\mathcal{F}_0 = \{F'_{0,e},\ F''_{0,e},\ e \in E\}$ и
$$F'_{0,e} = \langle e' \in E \mid e' <_B e\rangle_{\mathbb{C}},\ F''_{0,e} = \langle e' \in E \mid e' \leqslant_B e\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Непосредственно проверяется, что $\sigma_{\mathcal{G}}$ лежит в $\mathcal{S}$; более того, $\sigma \in W\sigma_0$, где $W\sigma_0 = \{w \cdot \sigma_0,\ w \in W\}$ обозначает W-орбиту сюръекции σ_0.

Теперь мы в состоянии сформулировать основной результат этой главы. Обозначим через $B\mathcal{G}$ орбиту обобщённого флага $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell$ относительно естественного действия группы B на $\mathcal{F}\ell$. Пусть W^P — какая-то полная система представителей левых смежных классов W/W_P.

Теорема 5.4. *Пусть $P = P_{\mathcal{F}}$, а B — произвольная расщепляющая борелевская подгруппа в G, содержащая H. Тогда*

i) $G/P = \mathcal{F}\ell = \bigsqcup_{\sigma \in W\sigma_0} B\mathcal{F}_\sigma = \bigsqcup_{w \in W^P} B\mathcal{F}_{w\cdot\sigma_0}$;

ii) *если $\sigma \in W\sigma_0$, то обобщённый флаг $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell$ лежит на орбите $B\mathcal{F}_\sigma$ тогда и только тогда, когда $\sigma_{\mathcal{G}} = \sigma$;*

iii) *если $\sigma \in W\sigma_0$, то орбита $B\mathcal{F}_\sigma$ — локально замкнутое инд-подмногообразие в $\mathcal{F}\ell$, изоморфное аффинному пространству $\mathbb{A}^{n_P^B(\sigma)}$;*

iv) *если $\sigma,\ \tau \in W\sigma_0$, то $B\mathcal{F}_\sigma \subset \overline{B\mathcal{F}_\tau}$ тогда и только тогда, когда $\sigma \leqslant \tau$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$; случай $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$ рассматривается аналогично.

i) Утверждение вытекает из конечномерного разложения Шуберта для $\mathcal{F}\ell_n = \mathcal{F}\ell(d_n, V_n)$, где d_n — тип флага $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \cap V_n = \{F \cap V_n,\ F \in \mathcal{F}\}$. Действительно, если n достаточно велико и флаг $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G} \cap V_n$ лежит в $\mathcal{F}\ell_n$, то B_n-орбита $\mathcal{G}(n)$ содержит единственный элемент вида $\mathcal{F}_{w\cdot\sigma_0} \cap V_n$, $w \in W_n$.

ii) Пусть $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell$. Согласно утверждению i), существует единственная $\sigma \in W\sigma_0$ такая, что $\mathcal{G} \in B\mathcal{F}_\sigma$; пусть, к примеру, $\mathcal{G} = b(\mathcal{F}_\sigma)$ для какого-то $b \in B$. Тогда

$$G''_\alpha \cap F'_{0,e} = b(F''_{\sigma,\alpha} \cap F'_{0,e}) \text{ и } G''_\alpha \cap F''_{0,e} = b(F''_{\sigma,\alpha} \cap F''_{0,e}) \text{ для всех } e \in E,\ \alpha \in \mathcal{A},$$

так как b оставляет на месте $F'_{0,e}$ и $F''_{0,e}$. Отсюда следует, что $\sigma_{\mathcal{G}} = \sigma_{\mathcal{F}_\sigma}$. Более того, из определения $\mathcal{F}_\sigma$ видно, что $F''_{\sigma,\alpha} \cap F''_{0,e} \neq F''_{\sigma,\alpha} \cap F'_{0,e}$ в том и только том случае, когда $\sigma(e) \leqslant \alpha$. Значит,

$$\sigma(e) = \min\{\alpha \in \mathcal{A} \mid F''_{\sigma,\alpha} \cap F''_{0,e} \neq F''_{\sigma,\alpha} \cap F'_{0,e}\} = \sigma_{\mathcal{F}_\sigma}(e) \text{ для всех } e \in E.$$

Таким образом, $\sigma_{\mathcal{G}} = \sigma$. Равенство $\sigma_{\mathcal{G}} = \sigma$ гарантирует, в частности, что $\sigma_{\mathcal{G}} \in \mathcal{S}$.

iii) Утверждение опять вытекает из конечномерного случая. Заметим, что при $w \in W_n$ образ клетки Шуберта $B_n(\mathcal{F}_{w\cdot\sigma_0} \cap V_n)$ при вложении ι_n будет аффинным подпространством клетки Шуберта $B_{n+1}(\mathcal{F}_{w\cdot\sigma_0} \cap V_{n+1})$.

iv) Выберем произвольные $\sigma,\ \tau \in W\sigma_0$, $\sigma \leqslant \tau$, и число $n \geqslant 1$, для которого $\mathcal{F}_\sigma(n)$ и $\mathcal{F}_\tau(n)$ содержатся в $\mathcal{F}\ell_n$. Можно считать без ограничения общности, что $\sigma \to \tau$, то есть что $\tau = \sigma \circ s_{e,e'}$ для каждой пары $(e, e') \in E \times E$, для которой $e <_B e'$ и $\sigma(e) < \sigma(e')$. Увеличивая n, если потребуется, мы можем считать, что $e,\ e' \in E_n$. Тогда из конечномерной теории получаем, что $B_n\mathcal{F}_\sigma(n) \subset \overline{B_n\mathcal{F}_\tau(n)}$. Таким образом, $B\mathcal{F}_\sigma \subset \overline{B\mathcal{F}_\tau}$. Обратно, предположим, что $\mathcal{F}_\sigma \in \overline{B\mathcal{F}_\tau}$. Тогда $\mathcal{F}_\sigma(n) \in \overline{B_n\mathcal{F}_\tau(n)}$ для достаточно большого $n \geqslant 1$. Применяя опять конечномерный результат, получаем, что $\sigma \leqslant \tau$. Это завершает доказательство. □

В дальнейшем мы будем называть $X^\circ_\sigma = B\mathcal{F}_\sigma$ и $X_\sigma = \overline{X^\circ_\sigma}$ *клеткой Шуберта* и *подмногообразием Шуберта* в $\mathcal{F}\ell$, отвечающими $\sigma \in \mathcal{S}$, соответственно.

Приведённое ниже следствие (разложение Брюа инд-группы G) сразу вытекает из разложения Шуберта инд-многообразия $\mathcal{F}\ell$, доказанного в теореме выше. Отметим, что, вообще говоря, B не сопряжена никакой подгруппе группы P, потому на самом деле существует много разных разложений Брюа группы G, зависящих от выбора подгрупп B и P.

Следствие 5.5. (разложение Брюа инд-группы G**)** *Пусть* G *— одна из инд-групп* $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$ *или* $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$, *а* P *и* B *— её расщепляющие борелевская и параболическая подгруппы, содержащие тор* H, *соответственно. Тогда имеется разложение*

$$G = \bigsqcup_{w \in W^P} B\dot{w}P.$$

Вообще говоря, B-орбиты в теореме 5.4 бесконечномерны. Два следующих результата определяют ситуации, в которых возникают конечномерные орбиты.

Теорема 5.6. *Пусть* G *— одна из инд-групп* $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$ *или* $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$, *а* P *и* B *— её расщепляющие борелевская и параболическая подгруппы, содержащие тор* H, *соответственно. Следующие условия эквивалентны*:

i) B *сопряжена относительно* G *подгруппе в* P;

ii) *хотя бы одна* B*-орбита на* G/P *кончномерна*;

iii) *некоторая* B*-орбита* G/P *является точкой* (*такая орбита всегда единственна*).

Доказательство. Условие i) означает, что найдётся элемент $g \in G$ такой, что $B \subset gPg^{-1}$, или, что равносильно, такой, что $gP \in G/P$ остаётся на месте под действием B, то есть что на G/P есть B-орбита, являющаяся точкой. Мы доказали эквивалентность i)⇔iii). Импликация iii)⇒ii) очевидна, а импликация ii)⇒i) следует из предложения 5.3 и теоремы 5.4. □

Следствие 5.7. *Предположим, что* $P \neq G$. *Следующие условия эквивалентны*:

i) B *сопряжена относительно* G *какой-то подгруппе в* P, *и* $\mathcal{F}_0$ *является флагом*;

ii) *каждая* B*-орбита на* G/P *конечномерна.*

Доказательство. Импликация i)⇒ii) следует из теоремы 5.6, следствия 5.2, теоремы 5.4 и следующего факта: если найдётся $w_0 \in W$, для которого $n_B^P(w_0 \cdot \sigma_0) = 0$, то для всех $w \in W$

$$n_B^P(w^{-1} \cdot \sigma_0) = \inf_{w' \in W_P} l(w_0 w' w).$$

(Этот факт доказан в [FP1, Proposition 10].)

Предположим теперь, что выполнено условие ii). По теореме 5.6, существует $g \in G$, для которого $B \subset gPg^{-1}$, так что мы можем полагать без ограничения общности, что $B \subset P$. Будем доказывать от противного: допустим, что $\mathcal{F}_0$ — не флаг, то есть что $(E, \leqslant_B)$ не изоморфно подмножеству в $\mathbb{Z}$. Тогда найдутся e, $e' \in E$ такие, что множество $\{e'' \in E \mid e <_B e'' <_B e'\}$ бесконечно. Поскольку сюръекция $\sigma_0 \in \mathcal{S}$, отвечающая подгруппе P, является неубывающим (см. предложение 5.3) и непостоянным (так как $P \neq G$) отображением, существуют $\widehat{e}$, $\widehat{e}'$, для которых $\widehat{e} \leqslant_B e <_B e' \leqslant_B \widehat{e}'$ и $\sigma_0(\widehat{e}) < \sigma_0(\widehat{e}')$. Значит, $\dim B\mathcal{F}_{w\cdot\sigma_0} = \infty$ для $w = s_{\widehat{e},\widehat{e}'}^{-1}$ по теореме 5.4 — противоречие. □

Пример 5.8. (разложение Шуберта инд-грассманианов) Пусть $G = \mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$ или $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$. Рассмотрим случай $\mathrm{Gr}(F, E)$, то есть будем считать, что

$$\mathcal{F} = \{\{0\} \subset F \subset V\}.$$

Здесь $\mathcal{A} = \{1, 2\}$, и если $\mathcal{F}$ совместим с базисом E, то сюръекция $\sigma_0 \colon E \to \mathcal{A}$, для которой $F = \langle e \in E \mid \sigma_0(e) = 1\rangle_{\mathbb{C}}$, может рассматриваться просто как подмножество $\sigma_0 \subset E$ такое, что $F = \langle \sigma_0 \rangle_{\mathbb{C}}$. Тем самым мы отождествляем $\mathcal{S}$ с множеством $\mathcal{S}(E)$ подмножеств базиса E с естественным действием группы W. Отметим, что

$$W\sigma_0 = \{\sigma \in \mathcal{S}(E) \mid |\sigma \setminus \sigma_0| = |\sigma_0 \setminus \sigma| < \infty\}.$$

Мы будем писать $F_\sigma = \langle \sigma \rangle_{\mathbb{C}}$ для любого $\sigma \in \mathcal{S}(E)$.

i) Предположим сначала, что $\dim F = k < \infty$. Тогда $\mathrm{Gr}(F, E) \cong \mathrm{Gr}(k)$. Обозначим через $\mathcal{S}_k(E)$ множество всех подмножеств базиса E мощности k. Согласно теореме 5.4, $\mathrm{Gr}(F, E) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{S}_k(E)} B\mathcal{F}_\sigma$. Клетка $X_\sigma^\circ = B\mathcal{F}_\sigma$ конечномерна тогда и только тогда, когда σ содержится в конечном идеале упорядоченного множества $(E, \leqslant_B)$. Отсюда следует, что на $\mathrm{Gr}(F, E)$

есть конечномерные B-орбиты в том и только том случае, когда максимальный флаг $\mathcal{F}_0$, отвечающий подгруппе B, содержит какое-то k-мерное подпространство. По теореме 5.6, в этом случае B сопряжена какой-то подгруппе в $\mathrm{Stab}_G\mathcal{F}$. Более того, все клетки X_σ° конечномерны тогда и только тогда, когда $(E, \leqslant_B)$ изоморфно $\mathbb{Z}_{>0}$ как частично упорядоченное множество, то есть тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ имеет вид $\mathcal{F}_0 = \{F_{0,0} \subset F_{0,1} \subset \ldots\}$, где $\dim F_{0,i} = i$.

ii) Далее, предположим, что $\operatorname{codim}_V F = k < \infty$. Как и раньше, $\mathrm{Gr}(F, E) \cong \mathrm{Gr}(k)$. Если, как выше,

$$\mathcal{F}_0 = \{F_{0,0} \subset F_{0,1} \subset \ldots\},$$

где $\dim F_{0,i} = i$ для всех i, а $B = \mathrm{Stab}_G\mathcal{F}_0$, то теорема 5.6 показывает, что все B-орбиты на $\mathrm{Gr}(F, E)$ бесконечномерны. Если, однако, B' — это стабилизатор какого-то максимального обобщённого флага, содержащего произвольное подпространство F', для которого флаг $\{\{0\} \subset F' \subset V\}$ будет E-соизмерим с флагом $\mathcal{F}$, то на $\mathrm{Gr}(F, E)$ есть конечномерные B'-орбиты. Более того, не существует борелевской подгруппы, которая на обоих инд-грассманианах из i) и ii) имела бы только конечномерные орбиты.

iii) Наконец, предположим, что и $\dim F$, и $\operatorname{codim}_V F$ бесконечны, тогда $\mathrm{Gr}(F, E) \cong \mathrm{Gr}(\infty)$. Предположим, что базис E занумерован множеством $\mathbb{Z}$. Рассмотрим борелевскую подгруппу $B \subset G$, отвечающую обычному порядку на $\mathbb{Z}$. Если $F = \langle e_i,\ i \leqslant 0\rangle_{\mathbb{C}}$, то $B \subset \mathrm{Stab}_G\mathcal{F}$, поэтому каждая B-орбита на $\mathrm{Gr}(F, E)$ конечномерна. С другой стороны, если $F = \langle e_{2i},\ i \in \mathbb{Z}\rangle_{\mathbb{C}}$, то размерность любой B-орбиты на $\mathrm{Gr}(F, E)$ бесконечна.

5.3. Гладкость подмногообразий Шуберта. В этом параграфе мы изучаем гладкость подмногообразий Шуберта $X_\sigma = \overline{B\mathcal{F}_\sigma}$ инд-многообразия $\mathcal{F}\ell$, где $\mathcal{F}\ell = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ или $\mathcal{F}\ell = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$. Общий принцип прозрачен: X_σ гладко тогда и только тогда, когда его пересечения с подходящими конечномерными флаговыми многообразиями $\mathcal{F}\ell$ гладки.

Для классических конечномерных групп есть замечательная характеризация гладких подмногообразий Шуберта флаговых многообразий в терминах недопустимых паттернов (pattern avoidance) (см., к примеру, [BL, Chapter 8]). Например, если $G_n = \mathrm{SL}(V_n)$ (здесь группа Вейля W_n изоморфна симметрической группе S_n), то подмногообразие Шуберта X_σ многообразия флагов G_n/B_n, отвечающее элементу $\sigma \in W_n$, будет гладким тогда и только тогда, когда *σ не допускает паттернов* 3412 *и* 4231, то есть не существует таких $i,\ j,\ k,\ l$, $1 \leqslant i < j < k < l \leqslant \dim V_n$, что

$$\sigma(k) < \sigma(l) < \sigma(i) < \sigma(j) \text{ или } \sigma(l) < \sigma(j) < \sigma(k) < \sigma(i).$$

Определение гладкой точки инд-многообразия дано в параграфе 2.1. Известно [Ku], что если X — инд-многообразие с исчерпанием $\bigcup_{n\geqslant 1} X_n$ конечномерными подмногообразиями, $x \in X$ и существует подпоследовательность $\{X_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ такая, что x — гладкая точка многообразия X_{n_k} для каждого $k \geqslant 1$, то x будет гладкой точкой на X. К примеру, $\mathbb{A}^\infty$ и $\mathbb{P}^\infty$ — гладкие инд-многообразия.

Обратное утверждение очевидно неверно. Например, зафиксируем для каждого n вложение $\mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$. Выберем произвольную точку $x \in \mathbb{A}^1$ и для всех $n \geqslant 1$ определим $X'_n \subset \mathbb{A}^{n+1}$ как n-мерное подпространство $\mathbb{A}^{n+1}$, содержащее точку x и отличное от $\mathbb{A}^n$. Положим теперь $X_n = X'_n \cup \mathbb{A}^n$, тогда подмногообразия X_n исчерпывают гладкое инд-многообразие $\mathbb{A}^\infty$, но x — особая точка на каждом из X_n. Тем не менее, сформулированное выше утверждение можно обратить частично: если каждое вложение $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ обладает левым обратным в категории алгебраических многообразий и $x \in X$ — особая точка на X_n при всех $n \geqslant 1$, то x — особая точка инд-многообразия X [FP1, Lemma 6].

В приведённом ниже критерии особости на B и $\mathcal{F}_\sigma$ наложены некоторые технические ограничения. Мы предполагаем, что выполняется хотя бы одно из двух условий: $\mathcal{F}_0$ — это флаг, или $\mathcal{F}_\sigma$ — это флаг и $\dim F''_{\sigma,\alpha}/F'_{\sigma,\alpha} < \infty$ всякий раз, когда $\{0\} \neq F'_{\sigma,\alpha} \subset F''_{\sigma_\alpha} \neq V$. Например, эти условия выполняются для инд-грассманианов. Напомним, что в главе 2 были определены $\mathcal{F}\ell_n$ и $\mathcal{F}\ell_n^\beta$; пересечение $X_{\sigma,n} = X_\sigma \cap \mathcal{F}\ell_n$ (соответственно, $X_{\sigma,n} = X_\sigma \cap \mathcal{F}\ell_n^\beta$) является подмногообразием Шуберта в $\mathcal{F}\ell_n$ (соответственно, в $\mathcal{F}\ell_n^\beta$) в обычном смысле. Через $\mathrm{Sing}(X)$ мы обозначаем множество особых точек инд-многообразия X.

Теорема 5.9. *Пусть G — одна из инд-групп $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$ или $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$, B, $\mathcal{F}_\sigma$, $\mathcal{F}_0$ удовлетворяют условиям, сформулированным выше. Тогда верно ровно одно из двух утверждений:*

i) *многообразие $X_{\sigma,n}$ гладко для всех n, тогда и X_σ тоже гладко;*

ii) *существует такое $n_0 \geqslant 1$, что $X_{\sigma,n}$ особо для всех $n \geqslant n_0$, тогда и X_σ тоже особо, причём $\mathrm{Sing}(X_\sigma) = \bigcup_{n\geqslant n_0} X_{\sigma,n}$.*

Доказательство см. в [FP1, Theorem 4]. Заметим, что мы не знаем, верна ли теорема 5.9 в общем случае (без ограничений на $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_\sigma$).

Пример 5.10. Мы видим, что в критерии гладкости подмногообразий Шуберта конечномерных многообразий флагов в терминах недопустимых паттернов можно перейти к пределу на бесконечности. К примеру, пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\sigma$ — максимальный обобщённый флаг, совместимый с базисом E. В этом случае на E имеется два линейных порядка: первый порядок $\leqslant_B$ отвечает расщепляющей борелевской подгруппе B, а второй порядок $\leqslant_P$ — расщепляющей параболической подгруппе $P = P_\mathcal{F}$, то есть

$$F'_e = \langle e' \in E \mid e' <_P e\rangle_\mathbb{C},\ F''_e = \langle e' \in E \mid e' \leqslant_P e\rangle_\mathbb{C}.$$

Из теоремы 5.4 мы знаем, что инд-подмногообразия Шуберта X_σ в $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ нумеруются элементами $W\sigma_0$, где $\sigma_0 \colon E \to \mathcal{A}$ — сюръекция, соответствующая обобщённому флагу $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\sigma_0}$. Поскольку здесь $\mathcal{F}$ максимален, $\mathcal{A} = E$ и σ_0 является биекцией, так что если $\sigma \in W\sigma_0$, то $\sigma \in W$. Мы знаем также, что для $\sigma \in W$

$$\dim X_\sigma = n_B^P(\sigma) = \#\{(e, e') \in E \mid e <_B e',\ \sigma(e) >_P \sigma(e')\}.$$

Из теоремы 5.9 и из конечномерного критерия вытекает, что если $\mathcal{F}_0$ является флагом или $\mathcal{F}$ является флагом с условием $\dim F''_{\sigma,\alpha}/F'_{\sigma,\alpha} < \infty$ для $\{0\} \neq F'_{\sigma,\alpha} \subset F''_{\sigma_\alpha} \neq V$, то инд-подмногообразие Шуберта X_σ особо тогда и только тогда, когда существует e_1, e_2, e_3, $e_4 \in E$, для которых $e_1 <_B e_2 <_B e_3 <_B e_4$ и $\sigma(e_3) <_P \sigma(e_4) <_P \sigma(e_1) <_P \sigma(e_2)$ или $\sigma(e_4) <_P \sigma(e_2) <_P \sigma(e_3) <_P \sigma(e_1)$. В частности, если базис E допускает бесконечно много попарно непересекающихся четвёрок e_1, e_2, e_3, $e_4 \in E$ таких, что $e_1 <_B e_2 <_B e_3 <_B e_4$ и, к примеру, $\sigma(e_3) <_P \sigma(e_4) <_P \sigma(e_1) <_P \sigma(e_2)$, то для всех σ инд-подмногообразия Шуберта X_σ будут особы. Следовательно, существуют пары $(B, \mathcal{F})$, для которых все инд-подмногообразия Шуберта соответствующего инд-многообразия обобщённых флагов особы.

5.4. Заключительные замечания. Главное отличие от конечномерного случая заключается в том, что инд-многообразие обобщённых флагов G/P допускает много несопряжённых разложений Шуберта. Это является следствием того факта, что подгруппы Бореля B, орбиты которой на G/P задают разложение Шуберта, не сопряжены относительно группы автоморфизмов группы G. В частности, у бесконечномерного проективного пространства есть как разложение Шуберта у которого все клетки бесконечномерны, так и разложение Шуберта, у которого все клетки конечномерны.

Отметим, что в конечномерном случае, помимо теоретико-групповой точки зрения на разложения Шуберта, который мы здесь придерживаемся, существует чисто геометрический подход, при котором фиксируется максимальный флаг и изучается, насколько данный флаг (иначе говоря, точка на G_n/P_n) от него отличается. Это подход применим и рассматриваемом нами случае: нужно выбрать максимальный флаг, неподвижный относительно действия группы B (возможно, содержащий G/P как подцепь). Построенная таким образом теория будет эквивалентна изложенной выше.

6. Векторные расслоения конечного ранга

В этой главе мы рассматриваем две связанные темы. Сначала мы обсуждаем бесконечномерный аналог теоремы Ботта–Бореля–Вейля. Мы также приводим критерий проективности для G/P: инд-многообразие G/P проективно в том и только том случае, когда $P = P_{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}$ — это флаг. Далее, теорема Барта–Ван де Вена–Тюрина–Сато гласит, что любое векторное расслоение конечного ранга на $\mathbb{P}^\infty$ изоморфно прямой сумме линейных расслоений. Мы приводим обобщение этого результата для широкого класса инд-многообразий, в частности, для инд-грассманиана $\mathrm{Gr}(\infty)$. Материал этой главы взят из [DPW], [PT2].

6.1. Теорема Ботта–Бореля–Вейля. Напомним сначала классическую теорему Ботта–Бореля–Вейля. Здесь мы будем предполагать, что G_n — связная односвязная простая алгебраическая группа, B_n — её борелевская подгруппа и P_n — параболическая подгруппа, содержащая B_n. Более точно, $G_n = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{C})$ или $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$. (Группа $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{C})$ — это универсальное накрытие группы $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$, и в этом параграфе вместо $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ мы будем использовать $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{C})$.) Хорошо известно, что группа Пикара $\mathrm{Pic}\, G_n/B_n$ отождествляется с решёткой целочисленных весов алгебры $\mathfrak{g}_n$ с помощью соответствия $\lambda \mapsto \mathcal{O}(\lambda)$, где $\mathcal{O}(\lambda)$ — линейное расслоение, индуцированное характером группы B_n, ограничение которого на алгебру Ли $\mathfrak{h}_n$ максимального тора H_n, содержащегося в B_n, совпадает с λ. В частности, каждое линейное расслоение на G_n/B_n допускает каноническую G_n-линеаризацию.

Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$ — целочисленный вес, рассмотрим тогда вес $\lambda + \rho$, где ρ — полусумма положительных корней группы G_n относительно B_n. Если $\lambda + \rho$ регулярен, то найдётся единственный элемент w_λ группы Вейля W_n группы G_n такой, что $w_\lambda(\lambda + \rho)$ доминантен. Следующая теорема вычисляет группы когомологий $H^q(G_n/B_n, \mathcal{O}(-\lambda))$ для всех целочисленных весов λ (в изоморфизме (7) ниже удобнее рассматривать $\mathcal{O}(-\lambda)$ вместо $\mathcal{O}(\lambda)$).

Теорема 6.1. (Ботта–Бореля–Вейля) *Пусть λ — целочисленный вес. Если $\lambda + \rho$ не регулярен, то*

$$H^q(G_n/B_n, \mathcal{O}(-\lambda)) = 0 \text{ при } q = 0,\ \ldots,\ \dim G_n/B_n,$$

то есть пучок, соответствующий линейному расслоению $\mathcal{O}(\lambda)$, ацикличен. Если $\lambda+\rho$ регулярен, то

$$H^q(G_n/B_n, \mathcal{O}(-\lambda)) = 0 \text{ при } q \neq l(w_\lambda),$$

где $l(w_\lambda)$ — длина элемента w_λ относительно простых корней группы B_n. Если же $q = l(w_\lambda)$, то существует канонический G_n-изоморфизм

$$H^q(G_n/B_n, \mathcal{O}(-\lambda)) \cong V(\mu)^*, \tag{7}$$

где $\mu = w(\lambda + \rho) - \rho$ и $V(\mu)$ — простой G_n-модуль старшего веса μ.

Эта теорема позволяет также вычислять когомологии произвольного векторного расслоения конечного ранга на G_n/P_n, которое просто как линеаризованное векторное G_n-расслоение, то есть индуцировано с простого конечномерного P_n-модуля. Отметим, что любое такое расслоение имеет вид $p_*\mathcal{O}(\lambda)$ для подходящего веса λ, где $p\colon G_n/B_n \to G_n/P_n$ — канонический эпиморфизм.

Теорема 6.2. *Для любого λ такого, что $p_*\mathcal{O}(-\lambda) \neq 0$, существует канонический изоморфизм G_n-модулей*

$$H^q(G_n/B_n, \mathcal{O}(-\lambda)) \cong H^q(G_n/P_n, p_*\mathcal{O}(-\lambda))$$

при всех $q \geqslant 0$.

Теорема 6.1 была доказана Р. Боттом в [Bot] (доказательство в случае $q = 0$ принадлежит А. Борелю и А. Вейлю). Альтернативное доказательство (которое мы горячо рекомендуем читателю) было дано М. Демазюром в [De1] и затем упрощено им в [De2].

Заметим, что группа Пикара инд-многообразия G/P естественно изоморфна проективному пределу $\varprojlim \mathrm{Pic}\, G_n/P_n$ соответствующих групп Пикара. Более того, группы $\mathrm{Pic}\, \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ и $\mathrm{Pic}\, \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$ естественно изоморфны соответствующим группам целочисленных весов алгебры Ли инд-группы $P = P_{\mathcal{F}}$.

В самом деле, хорошо известно, что

$$\mathrm{Pic}\,(G_n/P_n) \cong \mathrm{Hom}(P_n, \mathbb{C}^\times),$$

где $\mathrm{Hom}(P_n, \mathbb{C}^\times)$ обозначает группу морфизмов из $P_{\mathcal{F}}$ в мультипликативную группу поля $\mathbb{C}$. Непосредственная проверка показывает, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}\,(G_{n+1}/P_{n+1}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(P_{n+1}, \mathbb{C}^\times) \arrow[d] \\
\mathrm{Pic}\,(G_n/P_n) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}(P_n, \mathbb{C}^\times)
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Таким образом,

$$\mathrm{Pic}\,\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E) = \varprojlim \mathrm{Pic}\,G_n/P_n = \varprojlim \mathrm{Hom}(P_n, \mathbb{C}^\times) = \mathrm{Hom}(P_{\mathcal{F}}, \mathbb{C}^\times),$$

а последняя группа есть ни что иное, как группа целочисленных весов алгебры Ли группы $P_{\mathcal{F}}$. (Детали см. в [DP1, Proposition 7.2] и [DPW, Proposition 15.1].)

Обратимся теперь к специальному случаю $P = B$ для произвольной расщепляющей борелевской подгруппы B в G, содержащей фиксированную подгруппу Картана $H = \varinjlim H_n$, где H_n — подгруппа Картана в G_n для каждого $n \geqslant 1$. Пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы H. Вес $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ называется *целочисленным*, если для каждого $n \geqslant 1$ его ограничение $\lambda|_{\mathfrak{h}_n}$ является целочисленным весом алгебры $\mathfrak{g}_n$, где $\mathfrak{h}_n$ — алгебра группы H_n. Целочисленный вес $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ называется *регулярным*, если его ограничения $\lambda|_{\mathfrak{h}_n}$ регулярны для всех n.

Пусть λ — целочисленный вес алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда, используя наше описание группы Пикара G/B, мы видим, что линейные расслоения $\mathcal{O}(\lambda|_{\mathfrak{h}_n})$ образуют корректно определённую проективную систему. Её проективный предел будем обозначать через $\mathcal{O}(\lambda)$.

Обратимся теперь к группам когомологий $H^q(G/B, \mathcal{O}(-\lambda))$. Первый естественный вопрос таков: будет ли группа $H^q(G/B, \mathcal{O}(-\lambda))$ проективным пределом групп $H^q(G_n/B_n, \mathcal{O}(-\lambda|_{\mathfrak{h}_n}))$? Утвердительный ответ на этот вопрос можно получить, используя сформулированное ниже условие Миттаг-Леффлера.

Пусть $X = \varinjlim X_n$ — инд-многообразие и

$$\ldots \stackrel{\zeta_{n+1}}{\to} \mathcal{F}_n \stackrel{\zeta_n}{\to} \mathcal{F}_{n-1} \stackrel{\zeta_{n-1}}{\to} \ldots \stackrel{\zeta_2}{\to} \mathcal{F}_1 \to 0$$

является проективной системой пучков $\mathcal{O}_X$-модулей таких, что носитель $\mathcal{F}_n$ содержится в X_n. Предположим, что для некоторого $q \geqslant 0$ проективная система векторных пространств

$$\ldots \stackrel{\zeta_{n+1}^q}{\to} H^q(X, \mathcal{F}_n) \stackrel{\zeta_n^q}{\to} H^q(X, \mathcal{F}_{n-1}) \stackrel{\zeta_{n-1}}{\to} \ldots \to 0$$

удовлетворяет тому условию, что для каждого n фильтрация векторного пространства $H^q(X, \mathcal{F}_n)$ подпространствами $\zeta_m \circ \ldots \circ \zeta_{n+1}(H^q(X, \mathcal{F}_m))$ с какого-то момента стабилизируется (условие Миттаг-Леффлера). Тогда существует канонический изоморфизм

$$H^q(X, \varprojlim \mathcal{F}_n) \cong \varprojlim H^q(X, \mathcal{F}_n). \tag{8}$$

Более того, предположим, что инд-группа $G' = \varinjlim G'_n$ действует на X (в категории инд-многообразий) так, что G'_n действует на X_n. Если пучки $\mathcal{F}_n$ — это G'_n-пучки, а морфизмы ζ_n — это морфизмы G'_n-пучков, то изоморфизм (8) является изоморфизмом G'-модулей. Стандартная ссылка для условия Миттаг-Леффлера — работа [Ha] (см. также [DPW]).

В нашем случае условие Миттаг-Леффлера выполняется по очевидным причинам, поскольку инд-многообразия $X_n = G_n/B_n$ компактны и, следовательно, векторные пространства $H^q(G_n/B_n, \mathcal{O}(-\lambda|_{\mathfrak{h}_n}))$ конечномерны.

Следующий естественный вопрос таков: для каких λ и q группы когомологий $H^q(G/B, \mathcal{O}(-\lambda))$ будут ненулевыми? Ответ даётся следующий теоремой.

Пусть $W = \varinjlim W_n$ — группа, определённая в главе 5.1. Напомним, что в параграфе 5.1 была определена $\ell_B(w)$ для любого $w \in W$. Будем говорить, что целочисленный вес ν *B-доминантен*, если его ограничения $\nu|_{\mathfrak{h}_n}$ будут B_n-доминантны для всех n. Если ν — доминантный целочисленный вес, то конечномерные G_n-модули $V(\nu|_{H_n})$ образуют индуктивную систему, и G-модуль, равный соответствующему индуктивному пределу $\varinjlim V(\nu|_{\mathfrak{h}_n})$, обозначается через $V(\nu)$.

Теорема 6.3. *Группа $H^q(G/B, \mathcal{O}(-\lambda))$ отлична от нуля тогда и только тогда, когда существует $w \in W$ длины $\ell_B(w) = q$ такой, что $\mu = w(\lambda) - \sum_{\alpha\in\Phi^+,\ w(\alpha)\notin\Phi^+} \alpha$ является доминантным целочисленным весом. В этом случае*

$$H^q(G/B, \mathcal{O}(-\lambda)) \cong V(\mu)^*.$$

Заметим, что в конечномерном случае $w(\lambda) - \sum_{\alpha\in\Phi^+,\ w(\alpha)\notin\Phi^+} \alpha = w(\lambda + \rho) - \rho$, так что это условие на μ полностью аналогично конечномерному условию. Также легко видеть, что если такая пара (w, q) существует, то ровно одна, поэтому у $\mathcal{O}(-\lambda)$ есть не более одной ненулевой группы когомологий.

Неформально можно сказать, что $\mathcal{O}(-\lambda)$ ацикличен, если только вес λ не является почти доминантным, то есть если не существует доминантного веса μ вида $\mu = w(\lambda) - \sum_{\alpha\in\Phi^+,\ w(\alpha)\notin\Phi^+} \alpha$ для некоторого $w \in W$. С этой точки зрения, «большинство» пучков вида $\mathcal{O}(-\lambda)$ ациклично.

Теорема 6.3 следует из более общего результата, доказанного в [DPW]. Более того, теорема 6.3 — это непосредственное следствие [DPW, Proposition 14.1]. Отметим, что в [DPW] рассматриваются более общие G-линейные расслоения на G/P. Эти расслоения индуцированы с (возможно, бесконечномерных) про-рациональных P-модулей, которые могут быть, а могут и не быть двойственны P-модулям старшего веса. Как следствие, теория, построенная в [DPW], аналогична изучению расслоений вида $p_*\mathcal{O}(-\lambda)$, как в теореме 6.2. Отметим, что в недавней статье [HP] изучены когомологии эквивариантных векторных расслоений конечного ранга на G/P.

В конечномерном случае каждое линейное расслоение $\mathcal{O}(-\lambda)$ на G_n/P_n, для которого $H^0(G_n/P_n, \mathcal{O}(-\lambda)) \neq 0$, индуцирует морфизм из G_n/P_n в проективное пространство $\mathbb{P}(V(\lambda))$. Этот морфизм является вложением, если вес λ регулярен. Аналогичное утверждение верно для G/P, а именно, если $H^0(G/P, \mathcal{O}(-\lambda)) \neq 0$, то $\mathcal{O}(\lambda)$ индуцирует морфизм j_λ из G/P в проективное инд-пространство $\mathbb{P}(V(\lambda))$. Однако, не для всех P существует такое линейное расслоение $\mathcal{O}(-\lambda)$, что λ регулярен и B-доминантен хоть для какой-нибудь борелевской подгруппы B, содержащейся в P. Точный результат в этом направлении даётся следующей теоремой, см. [DPW, Section 15].

Теорема 6.4. *Морфизм j_λ является вложением тогда и только тогда, когда λ — регулярный доминантный вес для некоторой борелевской подгруппы $B \subset P$. Такой вес λ существует в том и только том случае, когда $P = P_{\mathcal{F}}$ для некоторого E-совместимого флага $\mathcal{F}$ в V. Инд-многообразие G/P проективно тогда и только тогда, когда $P = P_{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}$ — как выше.*

Как следствие, большинство инд-многообразий $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ не проективны, так как условие «быть флагом» на $\mathcal{F}$ весьма ограничительно.

6.2. Векторные расслоения. Классический результат Г. Биркгофа и А. Гротендика гласит, что каждое векторное расслоение (конечного ранга) на $\mathbb{P}^1$ изоморфно прямой сумме линейных расслоений $\mathcal{O}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. При $n \geqslant 2$ классификация векторных расслоений конечного ранга на $\mathbb{P}^n$ остаётся незавершённой. С другой стороны, замечательная теорема Барта–Ван де Вена–Тюрина–Сато утверждает, что каждое расслоение конечного ранга на инд-многообразии $\mathbb{P}^\infty$ изоморфно прямой сумме линейных расслоений. Это было установлено В. Бартом и А. Ван де Веном для расслоений ранга два в статье [BV] и доказано А.Н. Тюриным в [Ty] и Е. Сато в [Sa] для всех расслоений конечного ранга.

Здесь мы приводим результаты из работы [PT2], которые дают достаточные условия на локально полное линейное инд-многообразие X, гарантирующие выполнения теоремы Барта–Ван де Вена–Тюрина–Сато на X. Затем мы предъявляем класс инд-многообразий обобщённых флагов, удовлетворяющих этим достаточным условиям.

Пусть инд-многообразие X является индуктивным пределом цепи вложений

$$X_1 \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} X_2 \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} \dots \overset{\varphi_{n-1}}{\hookrightarrow} X_n \overset{\varphi_n}{\hookrightarrow} X_{n+1} \overset{\varphi_{n+1}}{\hookrightarrow} \dots$$

полных алгебраических многообразий (мы называем такие инд-многообразия *локально полными*). Через $\mathcal{O}_X = \varprojlim \mathcal{O}_{X_n}$ мы обозначаем *структурный пучок* инд-многообразия X.

Определение 6.5. *Векторное расслоение Q ранга $r \in \mathbb{Z}_{>0}$* на X — это проективный предел $Q = \varprojlim Q_n$ проективной системы векторных расслоений Q_n ранга r на X_n, то есть системы векторных расслоений Q_n вместе с фиксированными изоморфизмами

$$\psi_n\colon Q_n \to \varphi_n^* Q_{n+1}.$$

(Мы рассматриваем только векторные расслоения конечного ранга.) Здесь и ниже φ^* обозначает обратный образ векторного расслоения при морфизме φ.

Мы называем инд-многообразие X *линейным* (ср. параграф 3.1), если для достаточно большого n индуцированные гомоморфизмы групп Пикара $\varphi_n^*\colon \operatorname{Pic} X_{n+1} \to \operatorname{Pic} X_n$ являются эпиморфизмами. Любое инд-многообразие обобщённых флагов линейно. Чтобы сформулировать основной результат этого параграфа, нам потребуются три следующих технических условия.

Пусть сначала $X = \varinjlim X_n$ — линейное инд-многообразие, у которого $\operatorname{Pic} X_n$ — свободная абелева группа для всех n. Предположим, что существует конечное или счётное множество Θ_X и семейство $\{L_i = \varprojlim L_{i,n}\}_{i \in \Theta_X}$ нетривиальных линейных расслоений на X такие, что для каждого n имеем $L_{i,n} \cong \mathcal{O}_{X_n}$ для всех индексов, кроме конечного числа $i_1(n), ..., i_{j(n)}(n)$, причём образы $L_{i_1(n),n}, ..., L_{i_{j(n)}(n),n}$ в $\operatorname{Pic} X_n$ образуют базис группы $\operatorname{Pic} X_n$. В этом случае $\operatorname{Pic} X$ изоморфна прямому произведению бесконечных циклических групп, образующие которых — образы L_i. Обозначим через $\bigotimes_{i \in \Theta_X} L_i^{\otimes a_i}$ линейное расслоение на X, ограничение которого на X_n равно

$$\bigotimes\nolimits_{i \in \Theta_X} L_{i,n}^{\otimes a_i} = \bigotimes\nolimits_{k=1}^{j(n)} L_{i_k(n),n}^{\otimes a_{i_k(n)}}.$$

Мы будем говорить, что X *удовлетворяет условию* L, если, помимо указанных выше условий,

$$H^1(X_n, \bigotimes\nolimits_{i \in \Theta_X} L_{i,n}^{\otimes a_i}) = 0$$

для любого $n \geqslant 1$, если какое-то a_i отрицательно.

Предположим, что X удовлетворяет условию L. Пусть $i \in \Theta_X$, тогда гладкая рациональная кривая $C \cong \mathbb{P}^1$ на X называется *проективной прямой i-го семейства на X* (или просто *прямой i-го семейства*), если

$$L_j\big|_C \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\delta_{i,j}) \text{ для всех } j \in \Theta_X,$$

где $\delta_{i,j}$ — обычная дельта Кронекера. Через B_i мы обозначаем множество всех проективных прямых i-го семейства на X. Оно имеет естественную структуру инд-многообразия: $B_i = \varinjlim B_{i,n}$, где $B_{i,n} = \{C \in B_i \mid C \subset X_n\}$. Для каждой точки $x \in X$ подмножество $B_i(x) = \{C \in B_i \mid C \ni x\}$ несёт индуцированную структуру инд-многообразия.

Предположим также, что для любого $i \in \Theta_X$ существует инд-многообразие Π_i, являющееся индуктивным пределом цепи вложений

$$Pi_{i,1} \overset{\pi_{i,1}}{\hookrightarrow} \Pi_{i,2} \overset{\pi_{i,2}}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\pi_{i,n-1}}{\hookrightarrow} \Pi_{i,n} \overset{\pi_{i,n}}{\hookrightarrow} \Pi_{i,n+1} \overset{\pi_{i,n+1}}{\hookrightarrow} \ldots,$$

где точки $\Pi_{i,n}$ — это проективные подпространства $\mathbb{P}^{m_n}$ в $B_{i,n}$, вместе с линейными вложениями

$$\mathbb{P}^{m_n} \hookrightarrow \mathbb{P}^{m_{n+1}} = \pi_{i,n}(\mathbb{P}^{m_n}),$$

индуцированными вложениями $B_{i,n} \hookrightarrow B_{i,n+1}$, так что каждая точка Π_i рассматривается как проективное инд-подпространство $\mathbb{P}^\infty = \varinjlim \mathbb{P}^{m_n}$ в B_i. Для любой $x \in X$ рассмотрим следующие условия:

(A.i) для каждого $n \geqslant 1$ такого, что $x \in X_n$, любой нетривиальный пучок $L_{i,n}$ определяет морфизм $\psi_{i,n}\colon X_n \to \mathbb{P}^{r_{i,n}} = \mathbb{P}(H^0(X_n, L_{i,n})^*)$, который изоморфно отображает семейство прямых $B_{i,n}(x)$ на подсемейство прямых в $\mathbb{P}^{r_{i,n}}$, проходящих через точку $\psi_{i,n}(x)$;

(A.ii) многообразие $\Pi_{i,n}(x) = \{\mathbb{P}^{m_n} \in \Pi_{i,n} \mid \mathbb{P}^{m_n} \subset B_{i,n}(x)\}$ связно для любого $n \geqslant 1$;

(A.iii) проективные инд-подпространства $\mathbb{P}^\infty \in \Pi_i(x) = \varinjlim \Pi_{i,n}(x)$ заполняют всё $B_i(x)$;

(A.iv) для любого $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ существует $n_0(d) \in \mathbb{Z}_{>0}$ такое, что для любого d-мерного многообразия Y и любого $n \geqslant n_0(d)$ всякий морфизм $\Pi_{i,n}(x) \to Y$ постоянен.

В частности, (A.ii) и (A.iii) влекут за собой, что многообразия Π_{im}, B_{im}, $B_{im}(x)$ связны. Если все эти условия выполняются для всех $x \in X$, будем говорить, что X *удовлетворяет условию* A.

Наконец, предположим, что X удовлетворяет сформулированным выше условиям L и A. Векторное расслоение Q на X называется *B_i-однородным*, если для любой проективной прямой $\mathbb{P}^1 \in B_i$ на X ограничение расслоения $Q|_{\mathbb{P}^1}$ изоморфно $\bigoplus_{j=1}^{\operatorname{rk} Q} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_j)$ для каких-то целых чисел k_j, не зависящих от выбора $\mathbb{P}^1$. Если, кроме того, все $k_j = 0$, то Q называется *B_i-линейно тривиальным.* Мы называем Q *однородным* (соответственно, *линейно тривиальным*), если Q является B_i-однородным (соответственно, B_i-линейно тривиальным) для всех $i \in \Theta_X$. Будем говорить, что X *удовлетворяет условию* T, если любое линейно тривиальное векторное расслоение на X тривиально.

Основной результат этого параграфа таков.

Теорема 6.6. [PT2, Theorem 1] *Пусть Q — векторное расслоение на линейном инд-многообразии X.* i) *Если X удовлетворяет условиям* L *и* A *для каких-то фиксированных линейных расслоений $\{L_i\}_{i \in \Theta_X}$ и соответствующих семейств $\{B_i\}_{i \in \Theta_X}$ проективных прямых на X, то у Q есть фильтрация векторными подрасслоениями*

$$0 = Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_t = Q$$

с однородными факторрасслоениями Q_k/Q_{k-1}, $1 \leqslant k \leqslant t$. ii) *Если, кроме того, X удовлетворяет условию* T, *то указанная выше фильтрация Q расщепляется, а соответствующие факторы имеют вид*

$$Q_k/Q_{k-1} \cong \operatorname{rk}(Q_k/Q_{k-1}) \bigotimes\nolimits_{i \in \Theta_X} L_i^{\otimes a_{i,k}}$$

для каких-то $a_{i,k} \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant k \leqslant t$. В частности, Q изоморфно прямой сумме линейных расслоений.

Если X — один из инд-грассманианов $\mathrm{Gr}(k)$ или $\mathrm{Gr}^\beta(k, \infty)$, рассмотренных в главе 3, то на X существует тавтологическое расслоение S ранга $\operatorname{rk} S = k$. При $k \geqslant 2$ это расслоение не изоморфно прямой сумме линейных расслоений, поэтому теорема Барта–Ван де Вена–Тюрина–Сато не может выполняться. С другой стороны, верна следующая теорема.

Следствие 6.7. i) *Предположим, что $X = \mathrm{Gr}(\infty)$, $\mathrm{Gr}^\beta(\infty, k)$, $\mathrm{Gr}_0^\beta(\infty, k)$ или $\mathrm{Gr}_1^\beta(\infty, k)$. Тогда любое векторное расслоение на X изоморфно $\bigoplus_i \mathcal{O}_X(k_i)$ для некоторых $k_i \in \mathbb{Z}$.* ii) *Пусть $X = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$, где $\mathcal{F}$ — флаг в V такой, что $\operatorname{codim}_{F''} F' = \infty$ для всех $(F', F'') \in \mathcal{F}^\dagger$. Тогда любое векторное расслоение на X изоморфно прямой сумме линейных расслоений.*

Доказательство. i) Из нашего описания $\operatorname{Pic} X$ вытекает, что $\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}$ и что любое линейное расслоение на X изоморфно $\mathcal{O}_X(m)$, где, по определению, $\mathcal{O}_X(m)|_{X_n} \cong \mathcal{O}_{X_n}(m)$. Поскольку $\mathcal{O}_X(1)$ очень обилен, условие (A.i) выполняется. В [PT2, Section 4] проверено, что условия (A.ii)–(A.iv) тоже выполняются, поэтому X удовлетворяет условию A. То, что X удовлетворяет условию T, также проверено в [PT2, Section 4].

ii) В [PT2, Subsection 6.3] показано, что X удовлетворяет условиям L, A, T. □

Характеризация векторных расслоений на произвольных инд-многообразиях обобщённых флагов остаётся неизвестной. Тем не менее, второй автор выдвинул следующую гипотезу: если

$\mathcal{F}$ — максимальный обобщённый флаг, а Q — произвольное векторное расслоение конечного ранга на $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$, то Q допускает фильтрацию подрасслоениями, последовательные факторраслоения которой линейны.

Заметим также, что в [PT3] изучены векторные расслоения на так называемых скрученных инд-грассманианах. Скрученные инд-грассманианы не являются инд-многообразиями обобщённых флагов: они получаются как индуктивные пределы $\varinjlim X_n$ грассманианов относительно нелинейных вложений $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$. В [PT3] доказано, что любое векторное расслоение конечного ранга на любом скрученном инд-грассманиане тривиально.

7. Орбиты вещественных форм

В этой главе мы изучаем структуру G^0-орбит на инд-многообразии $\mathcal{F}\ell = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ для вещественной формы G^0 группы $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$. Наше изложение следует статье [IPW].

В конечномерном случае изучение орбит вещественных форм полупростых комплексных групп Ли на их флаговых многообразиях уходит корнями в линейную алгебру. Теорема Витта гласит, что два подпространства W_1, W_2 конечномерного векторного пространства W с заданной на нём невырожденной билинейной (симметрической или кососимметрической) формой или невырожденной эрмитовой формой изометричны внутри W (то есть переводятся друг в друга изометрией пространства W) тогда и только тогда, когда они изометричны.

Для эрмитова пространства W это можно рассматривать как утверждение об орбитах унитарной группы $U(W)$ на комплексном грассманиане $\mathrm{Gr}(k, W)$, где $k = \dim W_1 = \dim W_2$. Точнее говоря, орбиты группы $U(W)$ на $\mathrm{Gr}(k, W)$ параметризуются всевозможными сигнатурами эрмитовых форм (возможно, вырожденных) на k-мерных подпространствах пространства W.

Общая теория орбит вещественной формы G_n^0 (конечномерной) полупростой комплексной группы Ли G_n на флаговом многообразии G_n/P_n была развита Дж.А. Вольфом в работах [W1] и [W2]. Она стала стандартным инструментом в полупростой теории представлений и комплексной алгебраической геометрии. Дальнейшим продвижением стала теория пространств циклов, разработанная А. Хаклберри и Дж.А. Вольфом, см. монографию [FHW].

Основной результат этой главы гласит, что пересечение произвольной G^0-орбиты на G/P с конечномерным флаговым многообразием G_n/P_n из данного исчерпания G/P подмногообразиями G_n/P_n, $n \to \infty$, является одной G_n^0-орбитой. Это означает, что отображение

$$\{G_n^0\text{-орбиты на } G_n/P_n\} \to \{G_{n+1}^0\text{-орбиты на } G_{n+1}/P_{n+1}\}$$

инъективно. Используя это свойство, мы можем ответить на следующие вопросы.

1) Когда число G^0-орбит на G/P конечно?
2) Когда данная G^0-орбита на G/P замкнута?
3) Когда данная G^0-орбита на G/P открыта?

Ответы зависят не только от параболической подгруппы $P \subset G$, но и от типа вещественной формы. Например, если $P = B$ — верхнетреугольная борелевская инд-подгруппа в $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$ с положительными корнями $\{\varepsilon_i - \varepsilon_j\}$, $i, j \in \mathbb{Z}_{>0}$, $i < j$, то на G/B нет замкнутой $\mathrm{SU}(\infty,\infty)$-орбиты и нет открытой $\mathrm{SL}(\infty, \mathbb{R})$-орбиты.

7.1. Конечномерный случай. Пусть W — конечномерное векторное пространство. Напомним, что *вещественной формой* на W называется антилинейная инволюция τ на W. Множество $W^0 = \{v \in W \mid \tau(v) = v\}$ является *вещественной формой* пространства W, то есть W^0 — это вещественное подпространство в W, для которого $\dim_{\mathbb{R}} W^0 = \dim_{\mathbb{C}} W$ и $\mathbb{C}$-линейная оболочка $\langle W^0\rangle_{\mathbb{C}}$ которого совпадает с W. Любая вещественная форма W^0 пространства W однозначно определяет вещественную структуру τ на W, для которой W^0 — это множество неподвижных точек τ. *Вещественной формой* комплексной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется её вещественная подалгебра Ли $\mathfrak{g}^0$, являющаяся вещественной формой $\mathfrak{g}$ как комплексного векторного пространства.

Пусть G_n — связная комплексная полупростая алгебраическая группа, а G_n^0 — её *вещественная форма*, то есть G_n^0 — это вещественная замкнутая алгебраическая подгруппа в G_n, алгебра Ли $\mathfrak{g}_n^0$ которой является вещественной формой алгебры Ли $\mathfrak{g}_n$ группы G_n. Обозначим через P_n

произвольную параболическую подгруппу в G_n, а через G_n/P_n — соответствующее многообразие флагов. Группа G_n^0 естественно действует на G_n/P_n. В [W1] доказаны следующие факты о структуре G_n^0-орбит на G_n/P_n, см. [W1, Theorems 2.6, 3.3, 3.6, Corollary 3.4] (здесь мы используем обычную топологию гладкого многообразия на G_n/P_n).

Теорема 7.1. *Пусть G_n, P_n, G_n^0 — как выше.*

i) *Каждя G_n^0-орбита является вещественным гладким подмногообразием в G_n/P_n.*

ii) *Число G_n^0-орбит на G_n/P_n конечно.*

iii) *Объединение открытых G_n^0-орбит плотно в G_n/P_n.*

iv) *На G_n/P_n есть единственная замкнутая орбита Ω.*

v) *Выполняется неравенство $\dim_{\mathbb{R}} \Omega \geqslant \dim_{\mathbb{C}} G_n/P_n$.*

Объясним, как эта теорема связана с теоремой Витта в случае эрмитовой формы. Пусть W — n-мерное комплексное векторное пространство, а $G_n = \mathrm{SL}(W)$. Зафиксируем невырожденную эрмитову форму ω сигнатуры $(p, n-p)$ на пространстве W и обозначим через $G_n^0 = \mathrm{SU}(W, \omega)$ группу всех линейных операторов на W с определителем 1, которые сохраняют форму ω. Тогда G_n^0 является вещественной формой группы G_n. Для любого $k \leqslant n$ группа G_n естественно действует на грассманиане $\mathrm{Gr}(k, W)$ всех k-мерных комплексных подпространств пространства W. Каждому $U \in \mathrm{Gr}(k, W)$ можно сопоставить его *сигнатуру* $s(U) = (a, b, c)$, где ограничение формы $\omega|_U$ имеет ранг $a+b$ с a положительными и b отрицательными квадратами, а c равно размерности ядра ограничения формы на U. По теореме Витта, два подпространства U_1, $U_2 \in \mathrm{Gr}(k, W)$ лежат на одной G_n^0-орбите тогда и только тогда, когда их сигнатуры совпадают.

Более того, несложно проверить следующую формулу для числа $|\mathrm{Gr}(k, W)/G_n^0|$ орбит группы G_n^0 на $\mathrm{Gr}(k, W)$. Положим $l = \min\{p,\ n-p\}$. Тогда

$$|\mathrm{Gr}(k, W)/G_n^0| = \begin{cases} (n-k+1)(n-k+2)/2, & \text{если } n-l \leqslant k, \\ (l+1)(l+2)/2, & \text{если } l \leqslant k \leqslant n-l, \\ (k+1)(k+2)/2, & \text{если } k \leqslant l. \end{cases}$$

При этом G_n^0-орбита подпространства $U \in \mathrm{Gr}(k, W)$ открыта тогда и только тогда, когда ограничение формы ω на U невырождено, то есть когда $c = 0$. Следовательно, число открытых орбит равно $\min\{k+1, l+1\}$. Существует единственная замкнутая G_n^0-орбита Ω на $\mathrm{Gr}(k, W)$, состоящая из всех k-мерных подпространств в W, для которых $c = \min\{k, l\}$ (условие $c = \min\{k, l\}$ максимизирует вырожденность форм $\omega|_U$ на конечномерных подпространствах $U \subset W$). В частности, при $k = p \leqslant n-p$ орбита Ω состоит из всех изотропных k-мерных комплексных подпространств W. Более детально этот случай обсуждается в [W1].

7.2. Орбиты вещественных форм как гладкие инд-многообразия. Ниже мы приводим классификацию вещественных форм группы $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, принадлежащую А. Баранову [B]. По определению, вещественная инд-подгруппа G^0 группы G называется её *вещественной формой*, если G может быть представлено как неубывающее объединение $G = \bigcup \mathcal{G}_n$ своих конечномерных замкнутых в топологии Зарисского подгрупп таких, что каждая $\mathcal{G}_n$ является полупростой алгебраической группой и $G^0 \cap \mathcal{G}_n$ — вещественная форма группы $\mathcal{G}_n$ для каждого n. Чтобы определить вещественные формы G, выберем базис $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots\}$ в V и его исчерпание $\mathcal{E} = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathcal{E}_n$ конечными подмножествами такое, что $V_n = \langle \mathcal{E}_n \rangle_{\mathbb{C}}$ и $\langle \mathcal{E}_{n+1} \setminus \mathcal{E}_n \rangle_{\mathbb{C}} = \langle E_{n+1} \setminus E_n \rangle_{\mathbb{C}}$ для каждого $n \geqslant 1$. Напомним, что вложение $G_n \hookrightarrow G_{n+1}$ задаётся формулой $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$, где $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in V_n$ и $\widehat{\varphi}(e) = e$ при $e \in E \setminus E_n$.

Зафиксируем вещественную структуру τ на V, для которой $\tau(\varepsilon) = \varepsilon$ при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$. Тогда каждое конечномерное пространство V_n будет τ-инвариантным. Обозначим через $\mathrm{GL}(V_n, \mathbb{R})$ (соответственно, через $\mathrm{SL}(V_n, \mathbb{R})$) подгруппу всех обратимых (соответственно, имеющих определитель 1) операторов на V_n, определённых над $\mathbb{R}$. Напомним, что линейный оператор на комплексном векторном пространстве с вещественной структурой *определён над* $\mathbb{R}$, если он коммутирует с вещественной структурой, или, что равносильно, если он отображает вещественную форму в неё саму. Для каждого n отображение $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ задаёт вложение $\mathrm{SL}(V_n, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{SL}(V_{n+1}, \mathbb{R})$, поэтому возникает индуктивный предел $G^0 = \varinjlim \mathrm{SL}(V_n, \mathbb{R})$. Обозначим эту вещественную форму группы G через $\mathrm{SL}(\infty, \mathbb{R})$.

Теперь зафиксируем невырожденную эрмитову форму ω на V. Предположим, что её ограничение $\omega_n = \omega|_{V_n}$ тоже невырожденно при всех n и что $\omega(\varepsilon, V_n) = 0$ при $\varepsilon \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_n$. Обозначим через p_n размерность максимального ω_n-положительно определённого подпространства V_n и положим $q_n = \dim V_n - p_n$. Пусть $\mathrm{SU}(p_n, q_n)$ — подгруппа в G_n, состоящая из всех операторов, сохраняющих форму ω_n. Для каждого n отображение $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ индуцирует вложение $\mathrm{SU}(p_n, q_n) \hookrightarrow \mathrm{SU}(p_{n+1}, q_{n+1})$, поэтому возникает индуктивный предел $G^0 = \varinjlim \mathrm{SU}(p_n, q_n)$. Если $p_n = p$ при некотором p для всех достаточно больших n (соответственно, если $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = \infty$), то мы обозначаем эту вещественную форму группы G через $\mathrm{SU}(p, \infty)$ (соответственно, через $\mathrm{SU}(\infty, \infty)$).

Наконец, зафиксируем *кватернионную структуру* J на V, то есть антилинейный автоморфизм пространства V такой, что $J^2 = -\mathrm{id}_V$. Предположим, что комплексная размерность пространства V_n чётна для каждого $n \geqslant 1$ и что ограничение J_n автоморфизма J на V_n является кватернионной структурой на V_n. Кроме того, предположим, что

$$J(\varepsilon_{2i-1}) = -\varepsilon_{2i},\ J(\varepsilon_{2i}) = \varepsilon_{2i-1}$$

при $i \geqslant 1$. Пусть $\mathrm{SL}(V_n, \mathbb{H})$ — подгруппа в G_n, состоящая из всех линейных операторов, коммутирующих с J_n. Тогда при каждом n отображение $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ индуцирует вложение групп $\mathrm{SL}(V_n, \mathbb{H}) \hookrightarrow \mathrm{SL}(V_{n+1}, \mathbb{H})$, и мы обозначаем индуктивный предел через $G^0 = \mathrm{SL}(\infty, \mathbb{H}) = \varinjlim \mathrm{SL}(V_n, \mathbb{H})$. Эта инд-группа тоже является вещественной формой группы G.

Следующий результат вытекает из [B, Theorem 1.4] и [DP2, Corollary 3.2].

Теорема 7.2. *Если $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, то $\mathrm{SL}(\infty, \mathbb{R})$, $\mathrm{SU}(p, \infty)$, $0 \leqslant p < \infty$, $\mathrm{SU}(\infty, \infty)$, $\mathrm{SL}(\infty, \mathbb{H})$ — это все различные вещественные формы группы G с точностью до изоморфизма..*

Пусть теперь $\mathcal{F}$ — обобщённый флаг, совместимый с базисом E, $\mathcal{F}\ell = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ и $\mathcal{F}\ell_n = \mathcal{F}\ell(d_n, V_n)$, где d_n — тип флага $\mathcal{F} \cap V_n$. Тогда $\mathcal{F}\ell = \varinjlim \mathcal{F}\ell_n$, где вложение $\iota_n \colon \mathcal{F}\ell_n \hookrightarrow \mathcal{F}\ell_{n+1}$ задаётся формулой (3) (или, эквивалентно, ι_n является композицией вложений, заданных формулой (4)), см. параграф 2.2.

Обозначим через G^0 произвольную вещественную форму группы G (см. теорему 7.2). Группа $G_n = \mathrm{SL}(V_n)$ естественно действует на $\mathcal{F}\ell_n$, и отображение ι_n эквивариантно: $g \cdot \iota_n(x) = \iota_n(g \cdot x)$, $g \in G_n \subset G_{n+1}$, $x \in \mathcal{F}\ell_n$. Положим также $G_n^0 = G^0 \cap G_n$. Тогда G_n^0 будет вещественной формой для G_n. До конца главы мы накладываем на V_n некоторые специальные ограничения для различных вещественных форм, которые сейчас опишем в каждом случае.

Пусть $G^0 = \mathrm{SU}(p, \infty)$ или $\mathrm{SU}(\infty, \infty)$. Напомним, что ограничения ω_n фиксированной невырожденной эрмитовой формы ω на подпространства V_n тоже невырождены. С этого момента мы будем предполагать, что любой вектор $e \in E_{n+1} \setminus E_n$ ортогонален подпространству V_n относительно формы ω_{n+1}. Далее, пусть $G^0 = \mathrm{SL}(\infty, \mathbb{R})$. Здесь мы будем считать, что m_n нечётны для всех $n \geqslant 1$ и что $\langle E_n \rangle_{\mathbb{R}}$ — вещественная форма пространства V_n. Наконец, при $G^0 = \mathrm{SL}(\infty, \mathbb{H})$ мы будем предполагать, что все m_n чётны при $n \geqslant 1$ и что $J(e_{2i-1}) = -e_{2i}$, $J(e_{2i}) = e_{2i-1}$ для каждого i. Эти дополнительные предположения согласовывают выбор вещественной формы G^0 с инд-многообразием $\mathcal{F}\ell$.

Основной результат этой главы звучит так.

Теорема 7.3. *Если пересечение $\iota_n(\mathcal{F}\ell_n)$ с какой-то G_{n+1}^0-орбитой непусто, то это пересечение состоит из одной G_n^0-орбиты.*

Доказательство. Доказательство проводится в каждом случае отдельно. Здесь мы рассмотрим случай $G^0 = \mathrm{SU}(\infty, \infty)$. Доказательство для $G^0 = \mathrm{SU}(p, \infty)$, $0 \leqslant p < \infty$, абсолютно такое же, в то время как для $G^0 = \mathrm{SL}(\infty, \mathbb{R})$ and $\mathrm{SL}(\infty, \mathbb{H})$ доказательство основано на других идеях, см. [IPW, Theorem 3.1].

Выберем два флага

$$\mathcal{D} = \{\{0\} = D_0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_s = V_n\},$$
$$\mathcal{B} = \{\{0\} = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_s = V_n\}$$

в $\mathcal{F}\ell_n$, для которых $\widetilde{\mathcal{D}} = \iota_n(\mathcal{D})$ и $\widetilde{\mathcal{B}} = \iota_n(\mathcal{B})$ лежат на одной G^0_{n+1}-орбите. Положим

$$\widetilde{\mathcal{D}} = \{\{0\} = \widetilde{D}_0 \subset \widetilde{D}_1 \subset \ldots \subset \widetilde{D}_{\widetilde{s}} = V_{n+1}\},$$
$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{\{0\} = \widetilde{B}_0 \subset \widetilde{B}_1 \subset \ldots \subset \widetilde{B}_{\widetilde{s}} = V_{n+1}\}.$$

Существует $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{SU}(\omega_{n+1}, V_{n+1})$, удовлетворяющий условию $\widetilde{\varphi}(\widetilde{\mathcal{D}}) = \widetilde{\mathcal{B}}$, то есть $\widetilde{\varphi}(\widetilde{D}_i) = \widetilde{B}_i$ для всех $i = 0, \ldots, \widetilde{s}$. Чтобы доказать теорему, достаточно построить изометрию $\varphi\colon V_n \to V_n$ такую, что $\varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{B}$. Разумеется, можно затем нормировать φ так, чтобы получить изометрию с определителем 1. Согласно [Hu, Theorem 6.2], изометрия $\varphi\colon V_n \to V_n$, для которой $\varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{B}$, существует тогда и только тогда, когда D_i и B_i изометричны для всех i от 1 до s и

$$\dim(D_i \cap D_j^{\perp, V_n}) = \dim(B_i \cap B_j^{\perp, V_n}) \tag{9}$$

при всех $i < j$ от 1 до s. (Здесь $U^{\perp, V_n}$ обозначает ω_n-ортогональное дополнение в V_n к данному подпространству $U \subset V_n$.) Выберем i от 1 до s. Поскольку e_{n+1} ортогонален подпространству V_n, а $\widetilde{\varphi}$ устанавливает изометрию между $\widetilde{D}_i$ и $\widetilde{B}_i$, первое условие выполнено. Таким образом, остаётся проверить условие (9).

Для этого обозначим $C_n = \langle E_{n+1} \setminus E_n \rangle_{\mathbb{C}}$. Поскольку подпространство C_n ортогонально подпространству V_n, для произвольных подпространств $U \subset V_n$, $W \subset C_n$ выполняется условие $(U \oplus W)^{\perp, V_{n+1}} = U^{\perp, V_n} \oplus W^{\perp, C_n}$. Значит, если $\widetilde{D}_k = D_k \oplus W_k$, $\widetilde{B}_k = B_k \oplus W_k$ для $k \in \{i, j\}$ и каких-то подпространств W_i, $W_j \subset C_n$, то

$$\widetilde{D}_i \cap \widetilde{D}_j^{\perp, V_{n+1}} = (D_i \oplus W_i) \cap (D_j^{\perp, V_n} \oplus W_j^{\perp, C_n}) = (D_i \cap D_j^{\perp, V_n}) \oplus (W_i \cap W_j^{\perp, C_n}),$$

и такое же равенство верно для $\widetilde{B}_i \cap \widetilde{B}_j^{\perp, V_{n+1}}$. Это доказывает теорему. □

Следующий результат непосредственно вытекает из этой теоремы. (Определение гладкого вещественного инд-многообразия в C^∞-категории такое же, как алгебраического инд-многообразия.)

Следствие 7.4. *Пусть Ω — произвольная G^0-орбита на $\mathcal{F}\ell$, $\Omega_n = \iota_n^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{F}\ell_n$. Тогда*

i) *Ω_n есть одна G^0_n-орбита;*

ii) *Ω есть бесконечномерное вещественное гладкое инд-многообразие.*

Доказательство. i) Рассмотрим произвольные $\mathcal{D}, \mathcal{B} \in \Omega_n$. Для некоторого $m \geqslant n$ образы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{B}$ под действием морфизма $\iota_{m-1} \circ \iota_{m-2} \circ \ldots \circ \iota_n$ лежат на одной G^0_m-орбите. Применяя теорему 7.3 последовательно к ι_{m-1}, ι_{m-2}, …, ι_n, мы получаем, что $\mathcal{D}$ и $\mathcal{B}$ лежат на одной G^0_n-орбите.

ii) По определению, $\Omega = \varinjlim \Omega_n$. Далее, из (i) следует, что Ω является гладким вещественным инд-многообразием. По теореме 7.1 (v), $\dim_{\mathbb{R}} \Omega_n \geqslant \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}\ell_n$. Поскольку $\lim_{n\to\infty} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}\ell_n = \infty$, размерность орбиты Ω бесконечна. □

Теперь мы можем дать критерий конечности числа G^0-орбит на $\mathcal{F}\ell$. Мы называем обобщённый флаг $\mathcal{G}$ *конечным*, если он состоит из конечного числа (возможно, бесконечномерных) подпространств. Будем говорить, что обобщённый флаг $\mathcal{G}$ имеет *конечный тип*, если он состоит из конечного числа подпространств в V, каждое из которых имеет либо конечную размерность, либо конечную коразмерность в V. Ясно, что обобщённый флаг конечного типа является флагом. Говорят, что инд-многообразие $\mathcal{F}\ell(\mathcal{G}, E)$ имеет *конечный тип*, если $\mathcal{G}$ (или, что равносильно, любой $\widetilde{\mathcal{G}} \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{G}, E)$) имеет конечный тип.

Предложение 7.5. *Если $G^0 = \mathrm{SU}(\infty, \infty)$, $\mathrm{SL}(\infty, \mathbb{R})$ или $\mathrm{SL}(\infty, \mathbb{H})$, то число G^0-орбит на $\mathcal{F}\ell$ конечно тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}\ell$ имеет конечный тип. Если $G^0 = \mathrm{SU}(p, \infty)$, $0 < p < \infty$, то число G^0-орбит на $\mathcal{F}\ell$ конечно тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ конечен. Если $G^0 = \mathrm{SU}(0, \infty)$, то инд-многообразие $\mathcal{F}\ell$ — это одна G^0-орбита.*

Доказательство. Рассмотрим случай $G^0 = \mathrm{SU}(p, \infty)$, $0 < p < \infty$. Предположим сначала, что $\mathcal{F}$ конечен, то есть что $|\mathcal{F}| = N < \infty$. Для $n \geqslant 1$ введём обозначения $S_n = \{s(A) \mid A \subset V_n\}$ и $P_n = \{\dim A \cap B^{\perp, V_n} \mid A \subset B \subset V_n\}$. Пусть $s(A) = (a, b, c)$ для какого-то подпространства A в V_n. Тогда, очевидно, $a \leqslant p$ и $c \leqslant p$, поэтому $|S_n| \leqslant p^2$. С другой стороны, если

$A \subset B$ — какие-то подпространства V_n, то $A^{\perp,V_n} \supset B^{\perp,V_n}$, так что $A \cap B^{\perp,V_n} \subset A \cap A^{\perp,V_n}$. Однако $\dim A \cap A^{\perp,V_n} = c \leqslant p$. Таким образом, $|P_n| \leqslant p$. Теперь [Hu, Theorem 6.2] показывает, что число G_n^0-орбит на $\mathcal{F}\ell_n$ не превосходит числа $N \cdot |S_n| \cdot N^2 \cdot |P_n| \leqslant N^3 p^3$. Значит, по теореме 7.3, число G^0-орбит на инд-многообразии $\mathcal{F}\ell$ конечно.

Допустим теперь, что $\mathcal{F}$ бесконечен. В этом случае для каждого $m \geqslant 1$ существует такое n, что длина любого флага из $\mathcal{F}\ell_n$ не меньше, чем m, положительный индекс инерции формы $\omega|_{V_n}$ (другими словами, размерность максимального положительно определённого подпространства V_n) равен p и $\operatorname{codim}_{V_n} F_m \geqslant p$, где $\mathcal{F}_n = \{F_1 \subset \ldots \subset F_m \subset \ldots \subset V_n\}$. Легко проверить, что число G_n^0-орбит на $\mathcal{F}\ell_n$ не меньше, чем m. Следовательно, по теореме 7.3, число G^0-орбит на $\mathcal{F}\ell$ не меньше, чем m; другими словами, число G^0-орбит на $\mathcal{F}\ell$ бесконечно. Доказательство для $\mathrm{SU}(p,\infty)$, $p > 0$ завершено. Доказательство остальных случаев см. в [IPW, Proposition 4.1]. $\square$

7.3. Открытые и замкнутые орбиты. В этом параграфе мы описываем необходимые и достаточные условия того, что данная G^0-орбита на $\mathcal{F}\ell = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ является открытой или замкнутой. Оказывается, что для всех вещественных форм, кроме $\mathrm{SU}(p,\infty)$, $\mathcal{F}\ell$ одновременно имеет открытую и замкнутую орбиты тогда и только тогда, когда число орбит на нём конечно.

Сначала рассмотрим случай открытых орбит. Выберем любое n. Напомним [HW1], что G_n^0-орбита флага $\mathcal{F}_n = \{A_1 \subset A_k \subset \ldots \subset A_k\} \in \mathcal{F}\ell_n$ открыта тогда и только тогда, когда

для $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$ или $\mathrm{SU}(\infty,\infty)$: все A_i's невырожденны относительно формы ω;

для $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{R})$: при всех i, j, $\dim A_i \cap \tau(A_j)$ минимальна,

то есть $\dim A_i \cap \tau(A_j) = \max\{\dim A_i + \dim A_j - \dim V_n,\ 0\}$;

для $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{H})$: при всех i, j, $\dim A_i \cap J(A_j)$ минимальна в указанном смысле.

Заметим, что любые два обобщённых флага $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ из $\mathcal{F}\ell$ могут быть канонически отождествлены как линейно упорядоченные множества. Будем говорить, что образ подпространства $F \in \mathcal{F}_1$ в $\mathcal{F}_2$ при этом отождествлении *соответствует* подпространству F.

Рассмотрим произвольный антилинейный оператор μ на V. Говорят, что точка $\mathcal{G}$ многообразия $\mathcal{F}\ell$ находится *в общем положении относительно* μ, если $\widetilde{F} \cap \mu(\widetilde{H})$ не является собственным подпространством в $F \cap \mu(H)$ ни для каких $F,\ H \in \mathcal{G}$, $\widetilde{\mathcal{G}} \in \mathcal{F}\ell$, где $\widetilde{F}$, $\widetilde{H}$ — подпространства из $\widetilde{\mathcal{G}}$, соответствующие F, H. Аналогичное определение можно дать для флагов из $\mathcal{F}\ell_n$. Отметим, что если $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{R})$ или $\mathrm{SL}(\infty,\mathbb{H})$, то G_n^0-орбита флага $\mathcal{F}_n \in \mathcal{F}\ell_n$ открыта тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_n$ находится в общем положении относительно τ или J соответственно.

Имея в виду конечномерный случай, дадим следующее

Определение 7.6. Назовём обобщённый флаг $\mathcal{G}$ *невырожденным*, если

для $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$ или $\mathrm{SU}(\infty,\infty)$:

каждое $F \in \mathcal{G}$ невырожденно относительно ω;

для $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{R})$ или $\mathrm{SL}(\infty,\mathbb{H})$:

$\mathcal{G}$ находится в общем положении относительно τ или J соответственно.

Можно считать, что невырожденный обобщённый флаг находится «в общем положении по отношению к форме ω». Таким образом, все условия в определении 7.6 полностью аналогичны.

Для каждого обобщённого флага $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell$ обозначим через $n_{\mathcal{G}}$ произвольное фиксированное целое положительное число такое, что $\mathcal{G}$ совместим с базисом, содержащим $E \setminus E_{n_{\mathcal{G}}-1}$ (здесь мы полагаем $E_0 = \varnothing$; отметим, что это определение несколько отличается от того, которое было дано в параграфе 2.2).

Предложение 7.7. *Орбита Ω обобщённого флага $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell$ открыта тогда и только тогда, когда $\mathcal{G}$ невырожден.*

Доказательство. По определению топологии на $\mathcal{F}\ell$, Ω открыта тогда и только тогда, когда $\Omega_n = \iota_n^{-1}(\Omega \cap \iota_n(\mathcal{F}\ell_n))$ открыта для каждого n. Рассмотрим случай $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$ или $\mathrm{SU}(\infty,\infty)$

(доказательство остальных случаев см. в [IPW, Proposition 5.3]). В этом случае достаточно доказать, что $A \in \mathcal{G}$ невырожденно относительно ω тогда и только тогда, когда $\omega|_{A\cap V_n}$ невырожденна для всех $n \geqslant n_{\mathcal{G}}$. Доказательство получается прямой проверкой. В самом деле, если A вырожденно, то существует $v \in A$, для которого $\omega(v,w)=0$ при всех $w \in A$. Пусть $v \in V_{n_0}$ для некоторого $n_0 \geqslant n_{\mathcal{G}}$. Тогда $\omega|_{A\cap V_{n_0}}$ вырожденна. С другой стороны, если $v \in A \cap V_n$ ортогонален всем векторам $w \in A \cap V_n$ для какого-то $n \geqslant n_{\mathcal{G}}$, то v ортогонален вообще всем $w \in A$, потому что e ортогонален подпространству V_n при $e \in E \setminus E_n$. Это завершает доказательство. □

Будем говорить, что два обобщённых флага *имеют одинаковый тип*, если существует автоморфизм пространства V, переводящий один из них в другой. Понятно, что любые два E-соизмеримых обобщённых флага всегда имеют одинаковый тип. С другой стороны, легко видеть, что два обобщённых флага одного типа $\mathcal{F}$ и $\widetilde{\mathcal{F}}$ не обязаны обладать базисом $\widetilde{E}$, относительно которого они будут $\widetilde{E}$-соизмеримы.

Оказывается, что для $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$ и $\mathrm{SU}(\infty,\infty)$ требование существования открытой орбиты на инд-многообразии вида $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F},E)$ не накладывает ограничений на тип обобщённого флага $\mathcal{F}$. Более точно, верно такое

Следствие 7.8. *Если $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$, $0 \leqslant p < \infty$, то на $\mathcal{F}\ell$ всегда есть открытая G^0-орбита. Если $G^0 = \mathrm{SU}(\infty,\infty)$, то существуют базис $\widetilde{E}$ пространства V и обобщённый флаг $\widetilde{\mathcal{F}}$ того же типа, что и $\mathcal{F}$, такие, что на $\widetilde{\mathcal{F}\ell} = \mathcal{F}\ell(\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{E})$ есть открытая G^0-орбита.*

Доказательство. Для $\mathrm{SU}(p,\infty)$ обозначим через n натуральное число, для которого положительный индекс инерции формы $\omega|_{V_n}$ равен p. Пусть $\mathcal{G}_n \in \mathcal{F}\ell_n$ — любой флаг в V_n, состоящий из невырожденных подпространств (то есть такой, G_n^0-орбита которого открыта в $\mathcal{F}\ell_n$). Обозначим через g какой-нибудь линейный оператор из G_n, для которого $g(\mathcal{F}_n) = \mathcal{G}_n$, где, как и выше, $\mathcal{F}_n = \iota_n^{-1}(\mathcal{F}) \in \mathcal{F}\ell_n$. Тогда, конечно, $g(\mathcal{F})$ лежит в $\mathcal{F}\ell$ и невырожден. Получаем, что G^0-орбита обобщённого флага $g(\mathcal{F})$ на $\mathcal{F}\ell$ открыта.

Рассмотрим теперь случай $G^0 = \mathrm{SU}(\infty,\infty)$. Обозначим через $\widetilde{E}$ любой ω-ортогональный базис пространства V. Зафиксируем биекцию $E \to \widetilde{E}$. Она определяет автоморфизм пространства V. Пусть $\widetilde{\mathcal{F}}$ — обобщённый флаг, состоящий из образов подпространств из $\mathcal{F}$ относительно этого автоморфизма. Тогда $\widetilde{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{F}$ имеют одинаковый тип, и каждое подпространство из $\widetilde{\mathcal{F}}$, будучи натянутым на какое-то подмножество базиса $\widetilde{E}$, является невырожденным. Значит, G^0-орбита обобщённого флага $\widetilde{\mathcal{F}}$ на $\widetilde{\mathcal{F}\ell}$ будет открыта. □

Ситуация будет иной для $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{R})$. В то время как инд-грассманиан $\mathrm{Gr}(F,E)$ обладает открытой орбитой тогда и только тогда, когда либо $\dim F < \infty$, либо $\operatorname{codim}_V F < \infty$, несложно проверить, что инд-многообразие вида $\widetilde{\mathcal{F}\ell} = \mathcal{F}\ell(\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{E})$, где $\widetilde{\mathcal{F}}$ имеет тот же тип, что и $\mathcal{F}$ в примерах 2.7 ii) или iii), не может иметь открытую орбиту, потому что базис $\widetilde{E}$ обязательно удовлетворяет условию $\tau(\widetilde{e}) = \widetilde{e}$ для всех $\widetilde{e} \in \widetilde{E}$. Кватернионный случай обсуждается в [IPW, Section 5].

Перейдём теперь к замкнутым орбитам. Описание замкнутых орбит основано на схожих идеях, но (аналогично случаю открытых орбит) для разных вещественных форм детали разнятся.

Предположим, что $G^0 = \mathrm{SU}(\infty,\infty)$ или $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$. Мы называем обобщённый флаг $\mathcal{G}$ из $\mathcal{F}\ell$ *псевдоизотропным*, если $F \cap H^{\perp,V}$ не является собственным подпространством в $\widetilde{F} \cap \widetilde{H}^{\perp,V}$ ни для каких $F,\ H \in \mathcal{G}$, $\widetilde{\mathcal{G}} \in \mathcal{F}\ell$, где $\widetilde{F},\ \widetilde{H}$ — подпространства из $\widetilde{\mathcal{G}}$, соответствующие $F,\ H$. Аналогичное определение можно дать для флагов из $\mathcal{F}\ell_n$. Любой изотропный флаг будет псевдоизотропным, но обратное неверно. В частном случае, когда обобщённый флаг $\mathcal{G}$ имеет вид $\{\{0\} \subset F \subset V\}$, $\mathcal{G}$ будет псевдоизотропным тогда и только тогда, когда ядро $\operatorname{Ker}\omega|_F$ формы $\omega|_F$ не является собственным подпространством ядра $\operatorname{Ker}\omega|_{\widetilde{F}}$ ни для какого E-созимеримого флага $\{\{0\} \subset \widetilde{F} \subset V\}$. Далее, пусть $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{R})$. Обобщённый флаг $\mathcal{G}$ из $\mathcal{F}\ell$ называется *вещественным*, если $\tau(F) = F$ при любом $F \in \mathcal{G}$. Это эквивалентно следующему условию: $F \cap \tau(H)$ не является собственным подпространством в $\widetilde{F} \cap \tau(\widetilde{H})$ ни для каких $F,\ H \in \mathcal{G}$, $\widetilde{\mathcal{G}} \in \mathcal{F}\ell$, где $\widetilde{F},\ \widetilde{H}$ — подпространства из $\widetilde{\mathcal{G}}$, соответствующие $F,\ H$. Пусть, наконец, $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{H})$. Назовём обобщённый флаг $\mathcal{G}$ из $\mathcal{F}\ell$ *псевдокватернионным*, если $F \cap J(H)$ не является собственным подпространством в $\widetilde{F} \cap J(\widetilde{H})$ ни для каких $F,\ H \in \mathcal{G}$, $\widetilde{\mathcal{G}} \in \mathcal{F}\ell$, где $\widetilde{F},\ \widetilde{H}$ — подпространства из $\widetilde{\mathcal{G}}$, соответствующие $F,\ H$. Если $\mathcal{G}$ — *кватернионный* обобщённый флаг, то есть $J(F) = F$ для любого $F \in \mathcal{G}$, то он является и псевдокватернионным, но обратное неверно. Обобщённый флаг $\mathcal{G}$ вида $\{\{0\} \subset F \subset V\}$ будет псевдокватернионным в том и только том случае, когда $\operatorname{codim}_F(F \cap J(F)) \leqslant 1$.

Предложение 7.9. *Орбита Ω обобщённого флага $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell$ замкнута тогда и только тогда, когда*

$\mathcal{G}$ псевдоизотропный при $G^0 = \mathrm{SU}(\infty,\infty)$ и $\mathrm{SU}(p,\infty)$;

$\mathcal{G}$ вещественный при $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{R})$;

$\mathcal{G}$ псевдокватернионный при $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{H})$.

Доказательство. Рассмотрим сначала конечномерный случай, в котором есть ровно одна замкнутая G_n^0-орбита на $\mathcal{F}\ell_n$ (см. теорему 7.1). Легко проверить, что для всех вещественных форм условия предложения, применённые к конечномерным флагам из V_n, являются замкнутыми условиями на точки $\mathcal{F}\ell_n$. Поэтому G_n^0-орбита флага из V_n будет замкнутой тогда и только тогда, когда этот флаг удовлетворяет условиям предложения на конечном уровне.

Пусть $G^0 = \mathrm{SU}(\infty,\infty)$ или $\mathrm{SU}(p,\infty)$ (остальные случаи разобраны в [IPW, Proposition 5.6]). Предположим, что орбита Ω замкнута, тогда Ω_n замкнута для каждого $n \geqslant n_{\mathcal{G}}$. Пусть $\mathcal{G}$ не псевдоизотропен. Тогда найдутся такие $\widetilde{\mathcal{G}} \in \mathcal{F}\ell$ и $A,\ B \in \mathcal{G}$, что $\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^{\perp,V} \supsetneq A \cap B^{\perp,V}$, где $\widetilde{A},\ \widetilde{B}$ — подпространства из $\widetilde{\mathcal{G}}$, соответствующие $A,\ B$. Пусть

$$v \in (\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^{\perp,V}) \setminus (A \cap B^{\perp,V})$$

и $n \geqslant n_{\mathcal{G}}$ таковы, что $v \in V_n$. Тогда

$$v \in (\widetilde{A}_n \cap \widetilde{B}_n^{\perp,V_n}) \setminus (A_n \cap B_n^{\perp,V_n}),$$

где $A_n = A \cap V_n$, $B_n = B \cap V_n$, $\widetilde{A}_n = \widetilde{A} \cap V_n$, $\widetilde{B}_n = \widetilde{B} \cap V_n$, потому что $B^{\perp,V} \cap V_n = B_n^{\perp,V_n}$. Это означает, что $A_n \cap B_n^{\perp,V_n}$ является собственным подпространством в $\widetilde{A}_n \cap \widetilde{B}_n^{\perp,V_n}$. Значит, $\mathcal{G}_n$ не будет псевдоизотропным, что противоречит замкнутости орбиты Ω_n.

Предположим теперь, что орбита Ω_n не замкнута при некотором $n \geqslant n_{\mathcal{G}}$. Тогда найдутся $A_n,\ B_n \in \mathcal{G}_n = \iota_n^{-1}(\mathcal{G})$ и $\widetilde{\mathcal{G}}_n \in \mathcal{F}\ell_n$, для которых $A_n \cap B_n^{\perp,V_n}$ является собственным подпространством в $\widetilde{A}_n \cap \widetilde{B}_n^{\perp,V_n}$, где $\widetilde{A}_n,\ \widetilde{B}_n$ — подпространства в $\widetilde{\mathcal{G}}_n$, соответствующие $A_n,\ B_n$. Поскольку любой вектор $e \in E_{n+1} \setminus E_n$ ортогонален подпространству V_n, $A_{n+1} \cap B_{n+1}^{\perp,V_{n+1}}$ является собственным подпространством в $\widetilde{A}_{n+1} \cap \widetilde{B}_{n+1}^{\perp,V_{n+1}}$, где A_{n+1}, B_{n+1}, $\widetilde{A}_{n+1}$, $\widetilde{B}_{n+1}$ — образы A_n, B_n, $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{B}_n$ соответственно при вложении $\mathcal{F}\ell_n \hookrightarrow \mathcal{F}\ell_{n+1}$. Повторяя этот процесс, мы видим, что $\mathcal{G}$ не псевдоизотропен. Это завершает доказательство. □

Следствие 7.10. *Если $\mathrm{SL}(\infty,\mathbb{R})$, то $\mathcal{F}\ell$ всегда обладает замкнутой орбитой.*

Доказательство. Орбита обобщённого флага $\mathcal{F}$ замкнута, потому что $\tau(e) = e$ для всех базисных векторов $e \in E$. □

При $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$, $0 \leqslant p < \infty$, $G^0 = \mathrm{SU}(\infty,\infty)$ или $\mathrm{SL}(\infty,\mathbb{H})$, инд-многообразие $\mathcal{F}\ell$ иногда обладает замкнутой орбитой, а иногда нет.

Соединяя наши результаты о существовании открытых и замкнутых орбит, мы получаем такое следствие для остальных вещественных форм [IPW, Corollary 5.8].

Следствие 7.11. *Если G^0 — вещественная форма группы $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $G^0 \neq \mathrm{SU}(p,\infty)$, $0 < p < \infty$, то инд-многообразие обобщённых флагов $\mathcal{F}\ell = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F},E)$ обладает и открытой, и замкнутой орбитой тогда и только тогда, когда число G^0-орбит на нём конечно.*

7.4. Дальнейшие результаты. Естественная задача — обобщить результаты главы 7 на случай вещественных форм инд-групп $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$ и $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$. Другой естественный вопрос — изучить K-орбиты на G/P, где $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$, а K — симметрическая инд-подгруппа, то есть множество неподвижных точек некоторой инволюции на G. В конечномерном случае K-орбиты связаны с G^0-орбитами двойственностью Мацуки. В недавней работе [FP2] было доказано, что двойственность Мацуки выполняется для $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$ в случае, когда $P = B$ — расщепляющая борелевская подгруппа, что является первым шагом в реализации этой программы.

В недавней статье [W3] Дж.А. Вольф начал развивать теорию пространств циклов для инд-групп, которая также может служить потенциальным источником новых задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[B] A.A. Baranov. Finitary simple Lie algebras. J. Algebra **219** (1999), 299–329.

[BV] W. Barth, A. Van de Ven. A decomposability criterion for algebraic 2-bundles on projective spaces. Inventiones Math. **25** (1974), 91–106.

[BL] S. Billey, V. Lakshmibai. Singular loci of Schubert varieties. Progress in Mathematics **182**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2000.

[BB] A. Bjorner, F. Brenti. Combinatorics of Coxeter groups. Graduate Texts in Mathematics **231**, Springer, 2005.

[Bot] R. Bott. Homogeneous vector bundles. Annals od Mathematics **66** (1957), 203–248.

[Bou] N. Bourbaki. Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6. Springer, 2002.

[DC] E. Dan-Cohen. Borel subalgebras of root-reductive Lie algebras. J. Lie Theory **18** (2008), 215–241.

[DCP] E. Dan-Cohen, I. Penkov. Parabolic and Levi subalgebras of finitary Lie algebras. IMRN, article ID: `rnp169`.

[DCPS] E. Dan-Cohen, I. Penkov, N. Snyder. Cartan subalgebras of root-reductive Lie algebras. J. Algebra **308** (2007), no. 2, 583–611.

[De1] M. Demazure. Une démonstration algébrique d'un théorème de Bott. Invent. Math. **5** (1968), 349–356.

[De2] M. Demazure. A very simple proof of Bott's theorem. Invent. Math. **33** (1976), 271–272.

[DP1] I. Dimitrov, I. Penkov. Инд-varieties of generalized flags as homogeneous spaces for classical инд-groups. IMRN **2004** (2004), no. 55, 2935–2953.

[DP2] I. Dimitrov, I. Penkov. Borel subalgebras of $\mathfrak{gl}(\infty)$. Resenhas IME–USP **6** (2004), no. 2/3, 153–163.

[DP3] I. Dimitrov, I. Penkov. Weight modules of direct limit Lie algebras, Int. Math. Res. Notes **5** (1999), 223–249.

[DPW] I. Dimitrov, I. Penkov, J.A. Wolf. A Bott–Borel–Weil theory for direct limits of algebraic groups. Amer. J. Math. **124** (2002), 955–998.

[FHW] G. Fels, A.T. Huckleberry, J.A. Wolf. Cycle spaces of flag domains: a complex geometric viewpoint. Progr. in Math. **245**. Birhäuser/Springer, Boston, 2005.

[FP1] L. Fresse, I. Penkov. Schubert decomposition for инд-varieties of generalized flags. Asian J. Math., to appear, see also arXiv: `math.RT/1506.08263`.

[FP2] L. Fresse, I. Penkov. Orbit duality in ind-varieties of maximal flags, preprint.

[Ha] R. Hartshorne. On the de Rham cohomology of algebraic varieties. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **45** (1976), 5–99.

[HP] E. Hristova, I. Penkov. Decomposition of cohomology of vector bundles on homogeneous ind-spaces. CR Acad. Bul. Sci., to apper, see also arXiv: `math.RT/1703.05086`.

[Hu] H. Huang. Some extensions of Witt's Theorem. Linear and Multilinear Algebra **57** (2009), 321–344.

[HW1] A.T. Huckleberry, J.A. Wolf. Cycle spaces of real forms of $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. In: Complex geometry. Springer Verlag, Berlin, 2002, p. 111–133.

[HW2] A.T. Huckleberry, J.A. Wolf. Schubert varieties and cycle spaces. Duke Math. J. **120** (2003), 229–249.

[HW3] A.T. Huckleberry, J.A. Wolf. Injectivity of the double fibration transform for cycle spaces of flag domains. J. Lie Theory **14** (2004), 509–522.

[IPW] M.V. Ignatyev, I. Penkov, J.A. Wolf. Real group orbits on flag инд-varieties of $\mathrm{SL}(\infty, \mathbb{C})$. In: V. Dobrev, ed. Lie Theory and Its Applications in Physics, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics **191** (2016), 111–135, see also arXiv: `math.AG/1601.04326`.

[Ku] S. Kumar. Kac–Moody groups, their flag varieties and representation theory. Progress in Mathematics **204**. Birkhäuser, Boston, MA, 2002.

[Ma] O. Mathieu. Formules de Weyl et de Demazure et théorème de Borel–Weil–Bott pour les algèbres de Kac–Moody générales, I, II, prépublications, 1986, 1988. Formules de caractères pour les algèbres de Kac–Moody générales, Astérisque no 159–160, 1988.

[NP] K.-H. Neeb, I. Penkov. Cartan subalgebras of $\mathfrak{gl}_\infty$. Canad. Math. Bull. **46** (2003), no. 4, 597–616

[PT1] I. Penkov, A. Tikhomirov. Linear инд-grassmannians. Pure and Applied Math. Quarterly **10** (2014), 289–323.

[PT2] I. Penkov, A. Tikhomirov. On the Barth–Van de Ven–Tyurin–Sato theorem. Sbornik Mathematics **206** (2015), no. 6, 814–848.

[PT3] I. Penkov, A. Tikhomirov. Triviality of vector bundles on twisted инд-Grassmannians. Sbornik Mathematics **202** (2011), no. 1, 1–39.

[PS] A. Pressley, G. Segal. Loop Groups. Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

[Sa] E. Sato. On the decomposability of infinitely extendable vector bundles on projective spaces and Grassmann varieties. J. Math. Kyoto Univ. **17** (1977), 127–150.

[Ty] A.N. Tyurin. Vector bundles of finite rank over infinite varieties. Math. USSR Izvestija **10** (1976), no. 6, 1187–1204.

[W1] J.A. Wolf. The action of a real semisimple Lie group on a complex flag manifold. I: Orbit structure and holomorphic arc components. Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 1121–1237.

[W2] J.A. Wolf. The action of a real semisimple group on a complex flag manifold, II. Unitary representations on partially holomorphic cohomology spaces. Memoirs of the American Mathematical Society **138**, 1974.

[W3] J.A. Wolf. Cycle spaces of infinite dimensional flag domains. Annals of Global Analysis and Geometry, to appear, see also arXiv: `math.DG/1509.0329`.

Игнатьев Михаил Викторович
Самарский университет, факультет математики, кафедра алгебры и геометрии
E-mail: `mihail.ignatev@gmail.com`

Иван Пенков
Университет Якобса, Бремен
E-mail: `i.penkov@jacobs-university.de`